

Calcul d'une grande tyrolienne (2)

(utilisation du logiciel Visual-Basic de Microsoft)

Baudouin Lismonde, version du 21 novembre 2008

À l'occasion du congrès européen de spéléologie : Vercors 2008, les organisateurs ont installé une tyrolienne de plus d'un kilomètre de portée avec une dénivellation entre les deux attaches.

Nous avons rédigé une autre note par ailleurs qui détaille les réflexions qui mènent à la mise en équations faite ici. Il est recommandé de la lire en premier.

Le réglage de la tension de la corde s'est fait au point haut à la clé dynamométrique. Cette tension est le facteur de réglage principal de la tyrolienne.

D'autres calculs ont été faits par Jean-Pierre Cassou et par le trio Frédéric Chambat, Laurent Morel et Stéphane Lips. Ils ont fait aussi des mesures que l'on consultera sur le site du SSF.

Les caractéristiques retenues ici pour les applications numériques de la tyrolienne sont les suivantes :

Longueur horizontale :	$D = 1280 \text{ m}$
Dénivellation H entre les deux amarrages :	$H = 264 \text{ m}$
Élasticité de la corde :	$e = 0,02$ ($=\Delta L/L$ pour 800 N de sollicitation)
Masse au mètre linéaire :	$m = 0,08 \text{ kg/m}$,
Masse du spéléo :	$M = 80 \text{ kg}$
Tension à l'amarrage haut :	$T_0 = 2500 \text{ N}$
Sollicitation maximale :	$T_m = 4500 \text{ N}$

Notations

b	longueur d'un tronçon au repos (m)	h	épaisseur du film de graisse (m)
b'	longueur du tronçon sous tension (m)	H	dénivellation des appuis (m)
c, c'	longueurs de contact de la corde sur le réa	k	vecteur unitaire vertical, ou nombre entier
ch	cosinus hyperbolique	L	distance entre les appuis (m)
Cx	coefficient de traînée	m	masse linéique de la corde (kg/m)
d	diamètre de la corde (m)	n	nombre de tronçons retenus
D	portée horizontale de la tyrolienne (m)	M	masse du spéléo (kg)
e	élasticité de la corde	Mi	points au milieu des tronçons
Ei	points aux extrémités des tronçons	P	puissance des forces de frottement (W)
f	coefficient de frottement du nylon sur lui-même (on a pris $f = 0,2$)	Rc	rayon de courbure de la trajectoire (m)
f	coefficient de frottement équivalent d'un palier	R	rayon du réa de la poulie (m)
f'	coefficient de frottement équivalent d'un palier (0,015)	s	abscisse curviligne le long de la corde (m)
f*	coefficient de frottement équivalent pour les forces de freinage (autre que vent)	s	largeur d'une lanière de la corde (m)
F	force de la corde sur les spéléo+poulie (N)	St	longueur curviligne totale de la corde (m)
F_D, F_T	forces induites par les frottements (N)	S	maître-couple du spéléo (m ²)
g	accélération de la pesanteur (9,81 m s ⁻²)	sh	sinus hyperbolique
		t	temps (s)
		T	tension de la corde (en N)
		u	vitesse horizontale du spéléo (m/s)
		V	vecteur vitesse du spéléo (m/s)
		V_T, V_x	vitesse des ondes transverses et longitudinales (m/s)
		W	travail de la dissipation (J)
		x	abscisse horizontale (m)



y	coordonnée transversale horizontale	ρ	masse volumique de l'air ($1,1 \text{ kg/m}^3$)
z	ordonnée verticale (m)	θ	angle de la corde/horizontale
α	angle d'inclinaison de la corde sous le vent (rd)	μ	viscosité dynamique de la graisse (Pa s)
β	angle de déviation de la corde (rd)	ω	vitesse de rotation du réa de la poulie (rd/s)
Δr	espace ou jeu entre l'axe et le réa de la poulie		

1- Principe de l'étude

Nous décomposons la corde (non étirée) en n tronçons identiques de longueur b.

a) Formes approchées de la tyrolienne. Nous calculons la forme approchée que prend la corde pour chacun des n instants correspondant aux n positions du spéléo. Ces n calculs nécessitent une itération correspondant à la méthode de tir consistant à se donner la tension à l'amarrage haut et l'angle de la corde.

b) Trajectoire approchée du spéléo. À partir de ces fichiers, nous déduisons la trajectoire que suit le spéléo au cours du temps. Nous cherchons une relation du deuxième degré qui passe au mieux par les différents points.

c) Mouvement du spéléo et temps associés. Nous appliquons l'équation de la dynamique au spéléo pour en déduire son mouvement, c'est-à-dire les différents temps aux différents points.

d) Forces d'interaction et d'inertie. Nous calculons ensuite l'ensemble de forces d'interaction entre le spéléo et la corde et les différentes accélérations prises par la corde.

e) Bouclage en a). Nous revenons en a) pour recalculer les différentes formes prises par la corde, et ainsi de suite ...

Nous sortons de la boucle d'itération quand il y a convergence, c'est-à-dire quand les différentes formes prises par la corde n'évoluent plus.

Nous cherchons donc un tableau à deux dimensions (n,n) donnant l'ensemble des positions des milieux M_i des n tronçons à n instants, correspondant aux n fois que le spéléo est au milieu d'un tronçon. Ces instants ne sont pas régulièrement répartis, mais sont notés $t(j)$.

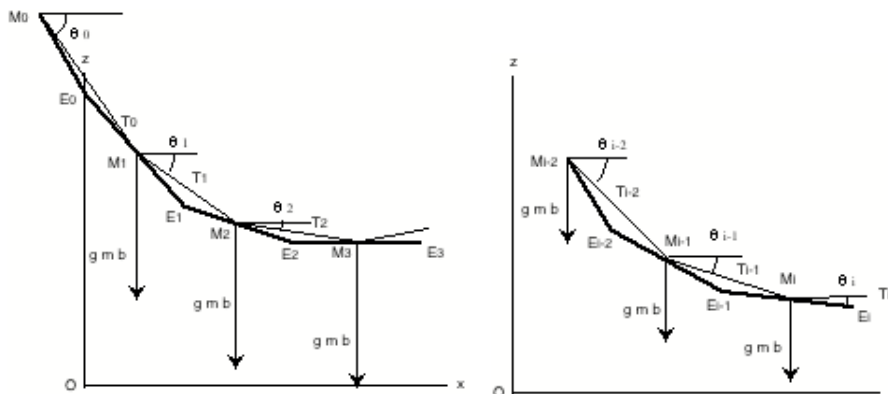


Fig. 1- Les notations pour les deux polygones

Le polygone des milieux est dit le funiculaire, le polygone des extrémités est dit la tyrolienne



Le point M_0 est fictif et ne servira pas

2- Calcul de la forme dynamique de la corde aux n instants donnés t_k

On met toutes les grandeurs à zéro au début du calcul.

Au début des itérations de la grande boucle, le calcul sera assez grossier puisqu'on a mis à zéro toutes les accélérations. Mais nous adoptons une approximation pour les forces en un point M_{ij} . À l'occasion du parcours de la grande boucle, on sera capable de calculer les accélérations de la corde et du spéléo, ainsi que les autres forces, et les intégrer dans les relations.

a) Début de la grande boucle (itération pour affiner les grandeurs dynamiques)

b) Début de la boucle de calcul pour les n positions du spéléo sur la tyrolienne

On choisit les deux valeurs de démarrages de la petite itération (petite boucle) nécessaire pour obtenir une tyrolienne qui arrive au point B :

$$\begin{matrix} T(0,1) \\ \text{TETA}(0,1) \end{matrix}$$

À chaque instant $t(j)$, c'est-à-dire pour chaque position $M(j,j)$ du spéléo au milieu d'un tronçon j , on balaye l'ensemble de la corde pour déterminer sa forme. Pour $j = 0$, la position du spéléo est le point M_0 . Ce point ne servira pas.

c) Début de la petite boucle (obtention du point l'amarrage inférieur) à l'instant t_j

Calculs successifs des tronçons de corde non chargés ou chargés par le spéléo. Supposons connues à l'instant $t(j)$ les coordonnées de l'extrémité gauche E_{i-1} du tronçon i , calculons celles de l'extrémité droite E_i du tronçon i de la tyrolienne. Les tensions dans les différents tronçons du funiculaire (et au cours du temps) sont notées $T(i,j)$. Les angles pris par les différents tronçons du funiculaire (et au temps j) sont notés $\theta(i,j)$. On écrit les deux équations dynamiques du tronçon i .

$$T(i-1,j) \cos [\theta(i-1,j)] + m b A_x(i,j) + F_x(j) = T(i,j) \cos [\theta(i,j)]$$

$$T(i-1,j) \sin [\theta(i-1,j)] + m b (g + A_z(i,j)) + F_z(j) = T(i,j) \sin [\theta(i,j)]$$

À la première itération de la grande boucle, on prendra nulles les deux accélérations de la corde A_x et A_z .

Si $i = j$, alors on sera sur un tronçon chargé par le spéléo. Pour ce cas seulement, les forces F_x et F_z seront non nulles.

Ces deux équations à deux inconnues nous fournissent $\theta(i,j)$ et $T(i,j)$ en fonction des valeurs précédentes. On calcule $\cos\theta$ par la première relation et $\sin\theta$ par la deuxième et l'on calcule la somme des carrés (qui vaut 1). On pose :

$$\text{Num} = T(i-1,j) \sin[\theta(i-1,j)] + m b (g + A_z(i,j)) + F_z(j)$$

$$\text{Dén} = T(i-1,j) \cos [\theta(i-1,j)] + m b A_x(i) + F_x(j)$$

Réserve pour le début des itérations. À la première itération de la grande boucle et à la première itération de la petite boucle, on adopte comme valeur de F (on a $i = j$) :



$$F_x = M g \cos[\theta(j-1,j)] \sin[\theta(j-1,j)] \quad \text{et} \quad F_z = M g \cos^2[\theta(j-1,j)]$$

Toujours pour la première itération de la grande boucle et à partir de la deuxième itération de la petite boucle, on adopte comme valeur :

$$F_x = M g \cos[\theta(j,j)] \sin[\theta(j,j)] \quad \text{et} \quad F_z = M g \cos^2[\theta(j,j)]$$

Pour la suite de la grande boucle, les forces sont calculées plus précisément plus loin.

Fin de la réserve et poursuite du calcul. On peut alors écrire :

$$T(i,k) = \sqrt{\text{Den}^2 + \text{Num}^2}$$

Ayant calculé $T(i,j)$, on déduit θ du rapport, membre à membre, de l'équation 2 par l'équation 1.

$$\theta(i,k) = \text{Arctg} \left(\frac{\text{Num}}{\text{Den}} \right)$$

Coordonnées de l'extrémité droite du tronçon. On calcule ensuite les coordonnées de l'extrémité droite du tronçon E_{ij} de la tyrolienne et l'angle du tronçon de tyrolienne par les relations :

$$bp(i,j) = b \left(1 + e \frac{T(i-1,j) + T(i,j)}{2 T_n} \right)$$

$$\theta_p(i,j) = \frac{\theta(i-1,j) + \theta(i,j)}{2}$$

$$XT(i,j) = XT(i-1,j) + bp(i,j) \cos(\theta_p(i,j))$$

$$ZT(i,j) = ZT(i-1,j) + bp(i,j) \sin(\theta_p(i,j))$$

On en déduit les coordonnées du milieu M_{ij} du tronçon de tyrolienne :

$$X(i,j) = \frac{XT(i-1,j) + XT(i,j)}{2}$$

$$Z(i,j) = \frac{ZT(i-1,j) + ZT(i,j)}{2}$$

Les relations conviennent pour i variant de 0 à n . Elles conviennent donc pour le premier point M_1 de la première itération.

d) Fin de la petite boucle

Ce calcul par balayage étant fait, la position du point d'arrivée n'a aucune chance d'être le point d'amarrage bas de la tyrolienne (le point B). On modifie d'abord la valeur du paramètre T_0 pour que la distance totale soit la distance entre les deux amarrages et l'on revient au début de la petite boucle (a). Puis on modifie la valeur du paramètre θ_0 jusqu'à ce que la dénivellation entre les deux amarrages soit la bonne. On revient à l'itération en T après chaque modification de θ ... On arrête les itérations de cette méthode de tirs quand la distance du dernier point E_{nj} au point B est inférieure à une certaine valeur donnée.

On peut alors continuer le calcul pour d'autres positions du spéléo sur la corde.

e) Fin de la boucle temporelle



À la fin de la boucle temporelle, on a rempli les différents tableaux des formes de la corde.

On peut continuer la grande boucle.

3- Détermination de la trajectoire du spéléo

Une fois calculé l'ensemble des points occupés par les centres des tronçons, on détermine la trajectoire du spéléo grâce à l'ensemble des points $M(j,j)$ pour j variant de 0 à n . On cherche alors l'équation de la parabole qui passe au mieux par ces $n+1$ points.

L'amarrage du haut a pour coordonnées $x = 0 ; z = 0$, l'amarrage du bas a pour coordonnées $x = D, z = -H$. La parabole passe par ces deux points. Elle fait partie de la famille à un paramètre (a) de paraboles d'équation :

$$z' = x \left[a(x - D) - \frac{H}{D} \right]$$

Pour les différentes valeurs $x(j)$ des centres des points occupés par le spéléo au cours du temps, on calcule la somme :

$$\sum_{j=1}^n (z'_j - z_j)^2$$

z' est donnée par l'équation de la parabole et z est donnée par la position du spéléo. On retient la valeur de a qui minimise cette somme.

On conduit le calcul simplement en développant les z'_j :

$$\frac{d}{da} \sum_{j=1}^n \left(a x_j (x_j - D) - \frac{H}{D} x_j - z_j \right)^2 = 0$$

$$\sum_{j=1}^n 2 \left(a x_j (x_j - D) - \frac{H}{D} x_j - z_j \right) x_j (x_j - D) = 0$$

$$a \sum_{j=1}^n (x_j^2 (x_j - D)^2) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{H}{D} x_j + z_j \right) x_j (x_j - D)$$

$$a = \frac{\sum_{j=1}^n \left(\frac{H}{D} x_j + z_j \right) x_j (x_j - D)}{\sum_{j=1}^n (x_j^2 (x_j - D)^2)}$$

Une fois trouvé le coefficient a , on peut calculer la dérivée dz'/dx :

$$\frac{dz'}{dx} = 2 a x - aD - \frac{H}{D}$$

4- Équation de la dynamique pour le spéléo (+ poulie)

La force de résistance des poulies. On a vu plus haut (pour un palier bien conçu) qu'on peut la mettre sous la forme :

$$F_D = \frac{1}{2} f' M g \cos \varphi \frac{D}{R}$$

Dans cette relation f' est le frottement dans le palier (0,015), D est le diamètre au niveau du roulement et R est le rayon du réa.

La force de résistance de la corde à la déformation. Le modèle théorique que nous avons élaboré plus haut, lie la force de freinage dans la corde aux différents paramètres de la descente.

$$F_T = \frac{1}{2} f M g \cos \varphi \frac{d}{R}$$

Dans cette équation f est le coefficient de frottement du nylon sur lui-même ($= 0,2$), Mg est le poids du spéléo, θ est l'angle par rapport à l'horizontale, d est le diamètre de la corde et R est le rayon du réa de la poulie.

Ces deux forces se mettent finalement sous la forme :

$$F_D + F_T = \frac{f' D + f d}{2 R} M g \cos \varphi = f^* M g \cos \varphi$$

$$\text{avec } f^* = \frac{f' D + f d}{2 R} = \frac{0,015 \cdot 0,01 + 0,2 \cdot 0,01}{2 \cdot 0,025} = 0,043$$

L'équation de la dynamique appliquée au personnage s'écrit :

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = - M g \vec{k} - \frac{1}{2} \rho C_x S |\vec{V}| \vec{V} + \vec{F}$$

Dans cette relation \vec{V} est le vecteur vitesse du spéléo, M sa masse (tout compris, même la poulie), ρ est la masse volumique de l'air, C_x est le coefficient de traînée du spéléo, S est le maître-couple du spéléo (m^2) et \vec{F} la force exercée par la corde sur l'ensemble (spéléo + poulie). Cette force comporte une composante normale et une composante tangentielle. Cette dernière provient de la dissipation dans la poulie et la corde. Le vecteur accélération n'est pas du tout parallèle à la corde. On peut décomposer ce vecteur accélération en deux termes : une composante parallèle au vecteur vitesse, une composante perpendiculaire. La première composante de l'accélération est celle qui fait varier la vitesse V , la seconde composante est celle qui justifie la courbure de la trajectoire.

On appellera A_V la composante du vecteur accélération parallèle à la vitesse du spéléo. Il représente la dérivée temporelle de la composante de la vitesse sur la trajectoire du spéléo.

$$A_V = \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{dV}{dt}$$

Le vecteur vitesse du spéléo n'est pas tout à fait parallèle à la corde. La direction de ce vecteur vitesse se déduit de l'équation de la trajectoire du spéléo. Si on appelle φ l'angle (négatif en général) que fait ce vecteur vitesse avec l'horizontale, on vérifie :

$$\text{tg } \varphi = \frac{dz'}{dx} = 2 a x - aD - \frac{H}{D}$$

$$\varphi = \text{Arctg} \left(2 a x - aD - \frac{H}{D} \right)$$

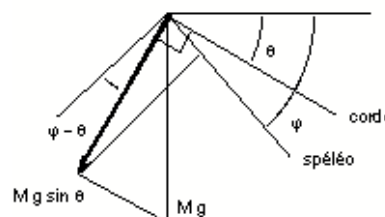


Fig. 2- Les forces et les directions



Cet angle φ est voisin de l'angle θ (tout en étant légèrement différent car sinon la corde ne se déformerait pas).

On en déduit, en projetant l'équation sur la tangente à la trajectoire (pas la tangente à la corde) :

$$M \frac{dV}{dt} = -M g \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \rho C_x S |V| V - f^* M g \cos \varphi \cos(\varphi - \theta)$$

Les angles φ et θ sont connus en chaque point x_j . On calcule la vitesse en chaque point M_j occupé par le spéléo (méthode d'Euler à améliorer éventuellement) :

$$V' = V + \Delta t A_v \quad \text{avec} \quad A_v = -g \sin \varphi - \frac{1}{2} \frac{\rho C_x S}{M} |V| V - f^* g \cos \varphi \cos(\varphi - \theta)$$

On prendra comme valeur de V la demi-somme des valeurs pour $j-1$ et j .

Calcul des vitesses et des temps

Pour $j = 1$, le spéléo est immobile au point M_1 . On a donc :

$$V_1 = 0$$

Le temps t_1 vaut :

$$t_1 = 0$$

Supposons le spéléo au point M_{j-1} . On va faire une itération pour calculer le paramètre Δt_j de sorte que le point suivant soit le point M_j . Le paramètre Δt_p , incrément du temps est pris assez petit au début de l'itération, par exemple une seconde.

$$V_p = V_{j-1} + \Delta t_p A_{j-1}$$

$$x_p = x_{j-1} + \Delta t_p V_p \cos \varphi$$

Le point M_p ne coïncide pas avec le point M_j . On fait une interpolation linéaire en modifiant l'incrément temporel Δt_p pour que le point atteint soit le point M_j :

$$\Delta t_j = \Delta t_p \frac{x_j - x_{j-1}}{x_p - x_{j-1}}$$

L'incrément temporel étant trouvé, on obtient :

$$t_j = t_{j-1} + \Delta t_j$$

Comme la trajectoire balistique ne va pas jusqu'à l'amarrage inférieur, on arrêtera le calcul quand la vitesse V deviendra négative. Ce point correspond à un point milieu d'un tronçon que nous noterons M_K .

Rayon de courbure. Le rayon de courbure de la trajectoire du spéléo pour $i = j$, se calculera à partir de la position de trois points successifs : $M(j-1, j-1)$, $M(j, j)$, $M(j+1, j+1)$.

$$R_c = \frac{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|} \approx \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{Z(j+1, j+1) - Z(j-1, j-1)}{X(j+1, j+1) - X(j-1, j-1)}\right)^2\right)^{3/2} \frac{(X(j+1, j+1) - X(j-1, j-1))^2}{|Z(j+1, j+1) + Z(j-1, j-1) - 2Z(j, j)|}$$



Ces rayons de courbures pourraient permettre d'estimer facilement la force centrifuge qui s'exerce sur le spéléo.

5- Calcul des interactions dynamiques

On peut maintenant calculer les différentes accélérations et les forces d'interaction du (spéléo+poulie) avec la corde à l'emplacement des n centres des tronçons de la corde.

Accélération d'un point de la corde. L'accélération $A(i,j-1)$ d'un point $M(i)$ de la tyrolienne sera obtenue à l'instant $t(j)$ en considérant les trois valeurs successives dans le temps des milieux de tronçons $M(i,j+1)$, $M(i,j)$, $M(i,j-1)$. Nous appelons \mathbf{A} le vecteur accélération du tronçon de corde et nous décomposons ce vecteur en deux composantes sur Ox et Oz que nous appelons A_x et A_z .

$$x_{j-1} = \frac{1}{2} A_{xj} (t_j - t_{j-1})^2 + v_{xj} (t_{j-1} - t_j) + x_j \quad (1)$$

$$x_{j+1} = \frac{1}{2} A_{xj} (t_{j+1} - t_j)^2 + v_{xj} (t_{j+1} - t_j) + x_j \quad (2)$$

On élimine la vitesse V_{xi} en formant l'équation (3) par l'opération symbolique :

$$(2)(t_j - t_{j-1}) - (1)(t_{j+1} - t_j) \quad (3)$$

Après calcul, on obtient :

$$A_{x_{i,j}} = 2 \frac{(x_{i,j+1} - x_{i,j})(t_j - t_{j-1}) - (x_{i,j} - x_{i,j-1})(t_{j+1} - t_j)}{(t_{j+1} - t_j)(t_j - t_{j-1})(t_{j+1} - t_j)}$$

$$A_{z_{i,j}} = 2 \frac{(z_{i,j+1} - z_{i,j})(t_j - t_{j-1}) - (z_{i,j} - z_{i,j-1})(t_{j+1} - t_j)}{(t_{j+1} - t_j)(t_j - t_{j-1})(t_{j+1} - t_j)}$$

Accélération du spéléo. Les deux composantes du vecteur accélération \mathbf{A}_s du spéléo à l'instant $t(j)$, entre les points $M(j-1,j-1)$, $M(j,j)$ et $M(j+1,j+1)$ se calculent en considérant que ces milieux sont espacés de la longueur d'un tronçon de longueur b (lié à la tension). On a calculé plus haut le vecteur vitesse du spéléo en chaque point M_j . Nous admettrons que cette longueur (donc la tension) change très peu sur trois points. Nous appelons \mathbf{A} le vecteur accélération du spéléo et nous décomposons ce vecteur en deux composantes sur Ox et Oz que nous appelons A_x et A_z .

$$x_{p_{j-1}} = \frac{1}{2} A_{sxj} (t_j - t_{j-1})^2 + v_{xj} (t_{j-1} - t_j) + x_{pj}$$

$$x_{p_{j+1}} = \frac{1}{2} A_{sxj} (t_{j+1} - t_j)^2 + v_{xj} (t_{j+1} - t_j) + x_{pj}$$

On peut appliquer la même méthode que pour la corde :

$$A_{sx_j} = 2 \frac{(x_{j+1,j+1} - x_{j,j})(t_j - t_{j-1}) - (x_{j,j} - x_{j-1,j-1})(t_{j+1} - t_j)}{(t_{j+1} - t_j)(t_j - t_{j-1})(t_{j+1} - t_j)}$$

$$A_{sz_j} = 2 \frac{(z_{j+1,j+1} - z_{j,j})(t_j - t_{j-1}) - (z_{j,j} - z_{j-1,j-1})(t_{j+1} - t_j)}{(t_{j+1} - t_j)(t_j - t_{j-1})(t_{j+1} - t_j)}$$

On peut aussi utiliser le fait qu'on connaît la vitesse. En soustrayant, membre à membre, la première équation de la deuxième, on obtient :

$$x_{p_{j+1}} - x_{p_{j-1}} = \frac{1}{2} A_{sxj} [(t_{j+1} - t_j)^2 - (t_{j-1} - t_j)^2] + v_{xj} (t_{j+1} - t_{j-1})$$



$$Asx_j = 2 \frac{xp_{j+1} - xp_{j-1} - vx_j (t_{j+1} - t_{j-1})}{t_{j+1}^2 - 2 t_j (t_{j+1} - t_{j-1}) - t_{j-1}^2}$$

$$Asz_j = 2 \frac{zp_{j+1} - zp_{j-1} - vz_j (t_{j+1} - t_{j-1})}{t_{j+1}^2 - 2 t_j (t_{j+1} - t_{j-1}) - t_{j-1}^2}$$

$$\text{avec } Z_p = X_p \left[a (X_p - D) - \frac{H}{D} \right]$$

Pour $j = 1$, on prendra :

$$Asx(1) = 0$$

$$Asz(1) = 0$$

Moment cinétique. Il y aurait à considérer la dérivée de la vitesse de rotation des segments pour prendre en compte les inerties de rotation. Nous négligerons cet effet. On peut montrer que ce terme est négligeable si le nombre n est suffisamment grand. En effet, les inerties croissent comme le carré de la longueur b (c'est-à-dire comme $1/n^2$) alors que les masses, (c'est-à-dire les longueurs) croissent comme b (c'est-à-dire comme $1/n$). Quand n augmente, les inerties de rotation deviennent négligeables devant les inerties de translation.

Forces sur le spéléo. L'équation de la dynamique appliquée à l'ensemble (spéléo + poulie) fournit à l'instant $t(j)$, les deux composantes de la force de la corde sur le spéléo (en $M(j,j)$).

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = -M g \vec{k} - \frac{1}{2} \rho C_x S |\vec{V}| \vec{V} + \vec{F}$$

$$F_x = M Asx + \frac{1}{2} \rho C_x S \sqrt{V_x^2 + V_z^2} V_x$$

$$F_z = M (Asz + g) + \frac{1}{2} \rho C_x S \sqrt{V_x^2 + V_z^2} V_z$$

Les deux dernières équations nous donnent, en chacun des milieux des tronçons, les composantes de la force exercée sur l'ensemble : spéléo + poulie.

f) Retour au début du calcul pour l'itération suivante : fin de la grande boucle

La comparaison de la nouvelle solution obtenue sur la forme de la courbe et la précédente nous permet d'estimer le degré de convergence obtenue. On arrête ou non le calcul. Et dans le second cas, on revient à 5-2.

Conclusion : le calcul est donc basé sur trois boucles imbriquées :

- la petite boucle (5 ou 6 itérations) pour la fermeture de la tyrolienne à son amarrage bas, en chaque point occupé par le spéléo,
- la boucle temporelle pour chacun des n points occupés par le spéléo au cours de sa descente,
- la grande boucle ou boucle dynamique pour prendre en compte progressivement les aspects dynamiques et les conséquences sur la forme de la tyrolienne.

On n'est pas sûr que le schéma numérique converge. C'est l'expérimentation numérique qui le dira. On constatera que la prise en compte de l'inertie du spéléo ne présente pas de difficulté numérique, alors que la prise en compte de l'inertie de la corde a montré une sensibilité numérique délicate à surmonter. Nous avons donc limité le nombre d'itérations pour échapper à une instabilité numérique intrinsèque.

Résultats des calculs numériques



Nous présentons quelques résultats issus des données relatives au site du Pas des Rages avant l'installation de la tyrolienne. Nous lui donnions 1170 m d'extension pour 250 m de dénivellation. Ces chiffres ont été modifiés depuis.

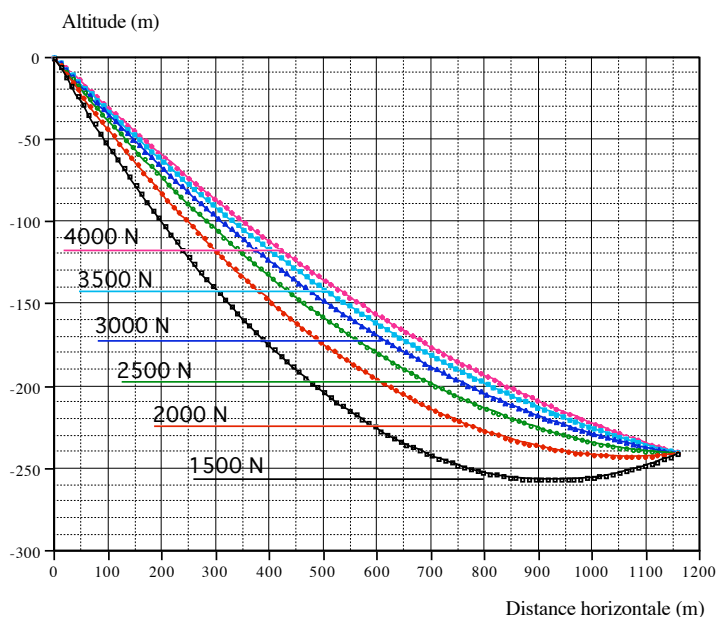
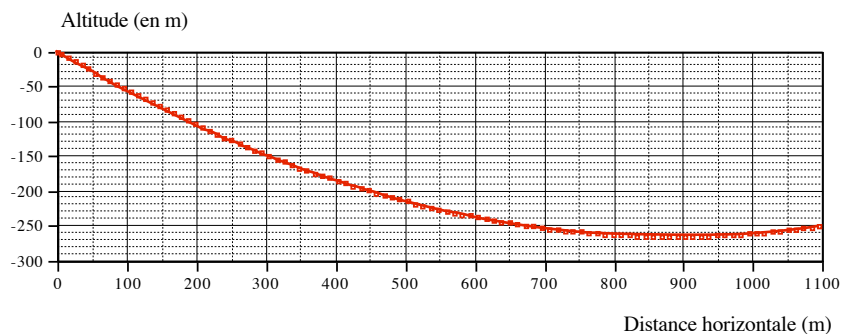


Fig. 3- La forme de la corde non chargée pour différentes tensions au point haut

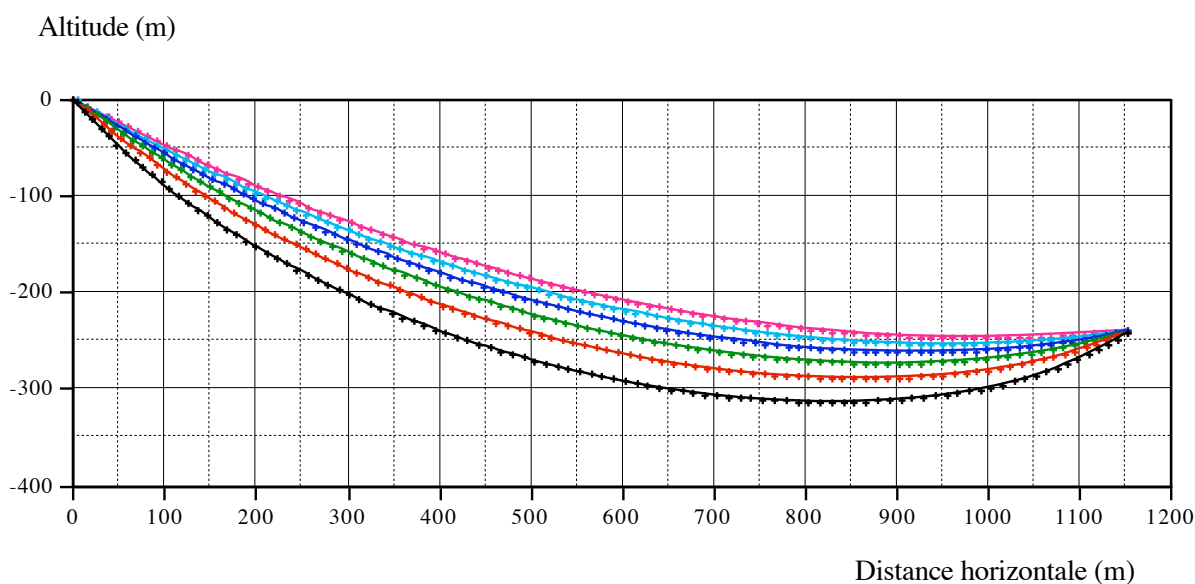


Fig. 4- L'ensemble des positions statiques occupés par le spéléo sur la tyrolienne (pour différentes tensions à vide au point haut : 1500 ; 2000 ; 2500 ; 3000 ; 350 ; 4000 N)

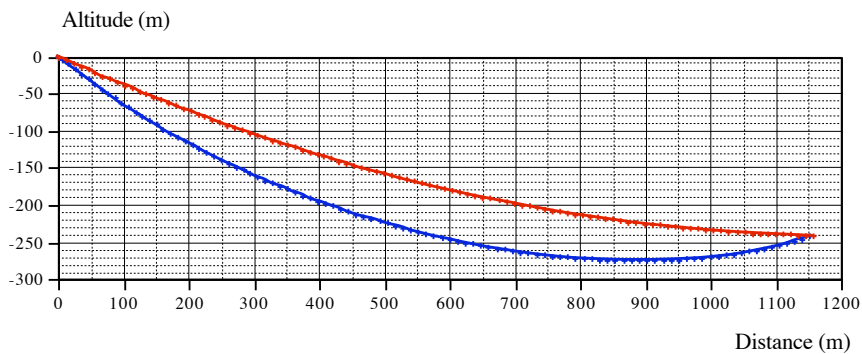


Fig. 5- Comparaison corde non chargée et chargée en mode dynamique (pour une tension à vide au point haut de 2500 N)

On remarque qu'il y a très peu de différence entre le mode statique et le mode dynamique (avec ou sans prise en compte de l'inertie de la corde). On pourrait donc penser que cette complication est inutile, mais l'examen des tensions montre que la tension à l'amarrage supérieur est différente en mode de descente quasi-statique et en mode dynamique. La tension est plus faible en mode dynamique.

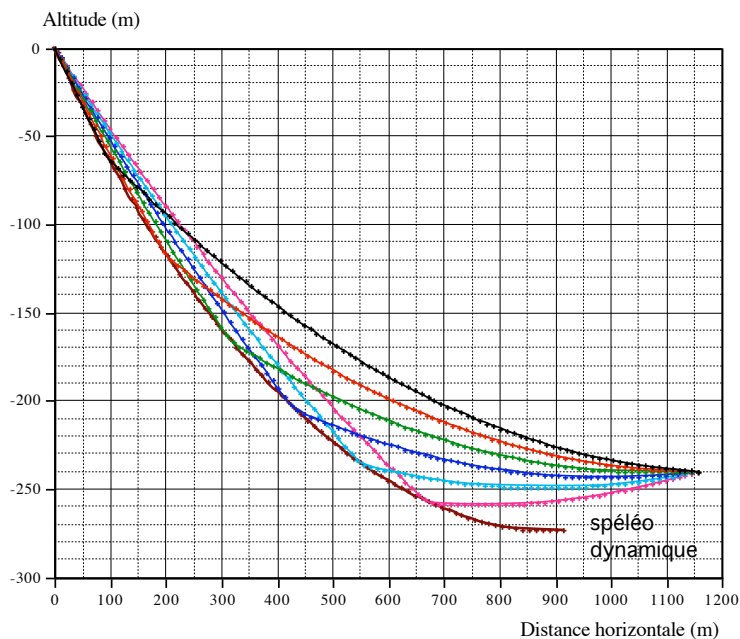


Fig. 6- L'ensemble des points occupés par le spéléo en mode dynamique (pour une tension à l'amarrage haut de 2500 N)

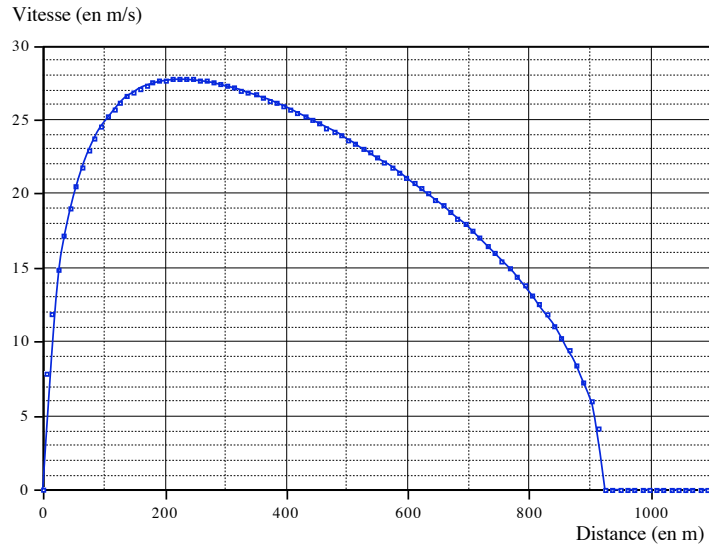


Fig. 7- Vitesse du spéléo en fonction de la distance horizontale ou du temps (pour une tension à vide de 2500 N à l'amarrage haut)

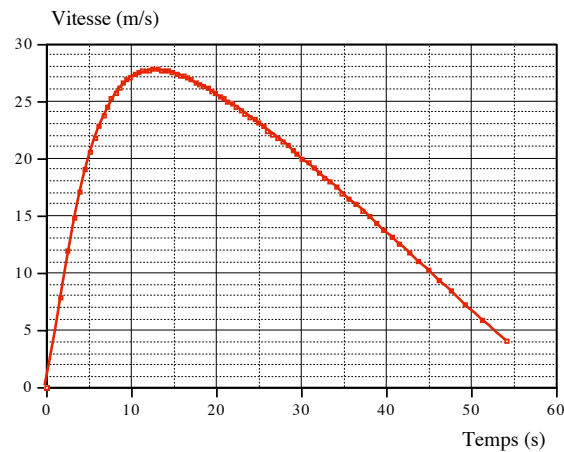


Fig. 8- Vitesse en fonction du temps (pour une tension de 2500 N sans charge)

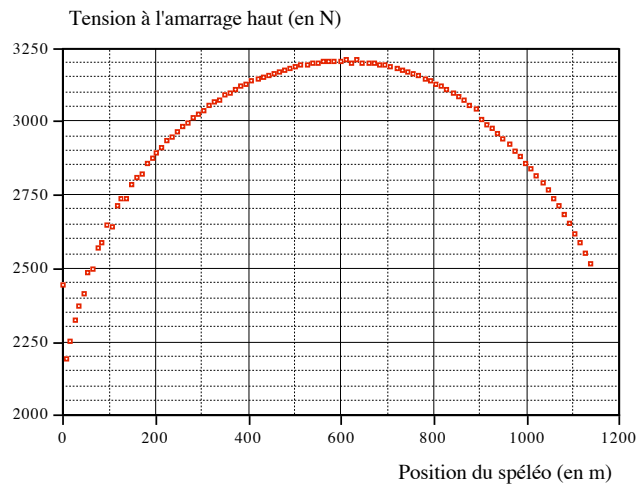


Fig. 9- La tension à l'amarrage supérieur en fonction de la position du spéléo

6- Existe-t-il une limite de portée à une tyrolienne sur corde simple ?

(Cette partie est aussi dans le premier rapport, elle fait donc double emploi)

La réponse est oui. Examinons en détail les conditions. Le poids de la corde augmente à peu près comme la portée. Si la corde est non chargée par un spéléo, la résistance à la traction d'une corde augmente comme le carré de son diamètre. Le poids linéique d'une corde augmente aussi comme le carré de son diamètre. Il ne sert donc à rien d'augmenter le diamètre.

Une corde d'un kilomètre pesant à peu près 1000 N et le spéléo 800 N, on voit que pour de très grandes tyroliennes de plusieurs kilomètres, la part du spéléo va décroissante avec la longueur. Et à la limite, le spéléo ne joue plus guère de rôle. Le problème tend vers un problème purement statique.

La condition de réalisation de la tyrolienne porte sur la condition suivante : on demande que le personnage descendant la tyrolienne arrive sans action supplémentaire au voisinage du point bas, ce qui nécessite une certaine tension à l'amarrage supérieur. On veut que la tension soit plus basse qu'une certaine tension limite imposée, par exemple 4000 ou 5000 N.

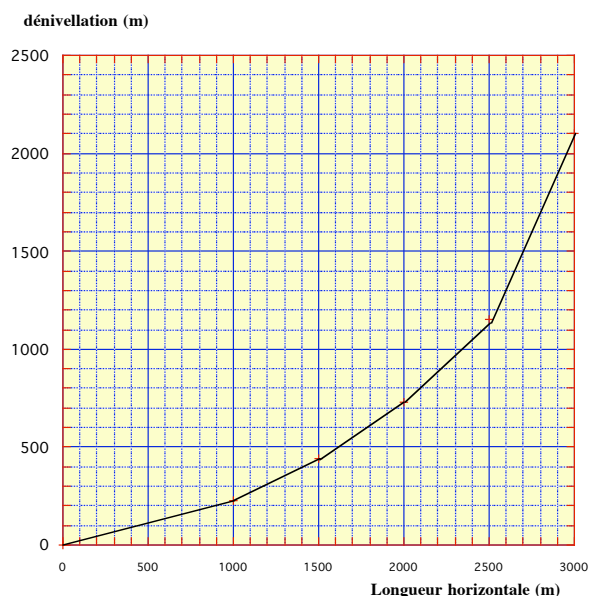


Fig. 10- La dénivellation nécessaire en fonction de la distance
Élasticité de 1 %, CxS = 0,75 m² et Masse du spéléo de 80 kg

On a tracé la dénivellation nécessaire (pour une tension sans charge de 4000 N et pour un CxS de 0,75 m²) pour que le spéléo parvienne à l'amarrage inférieur. On voit qu'elle augmente à peu près comme le carré de la portée de la tyrolienne.

La vitesse du spéléo est limitée par le freinage de l'air. Nous avons représenté la vitesse maximale atteinte au cours de la descente en fonction de la portée de la tyrolienne (140 km/h pour un CxS de 0,75 m² et une masse de 80 kg).

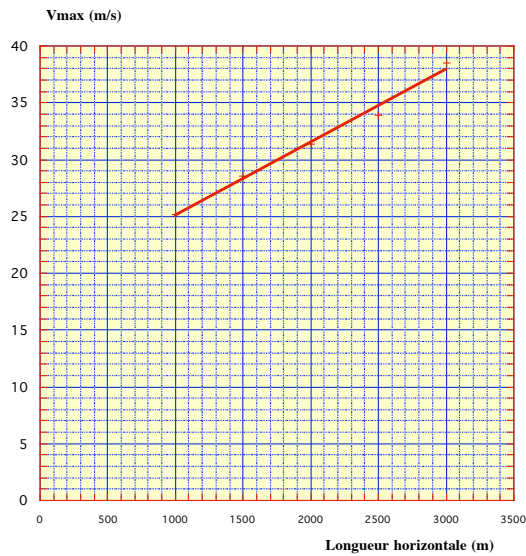


Fig. 11- Vitesse maximale (m/s) atteinte en fonction de la portée de la tyrolienne

Cette vitesse limite (mettons 140 km/h) fait que la durée de la descente augmente à peu près linéairement avec la portée.

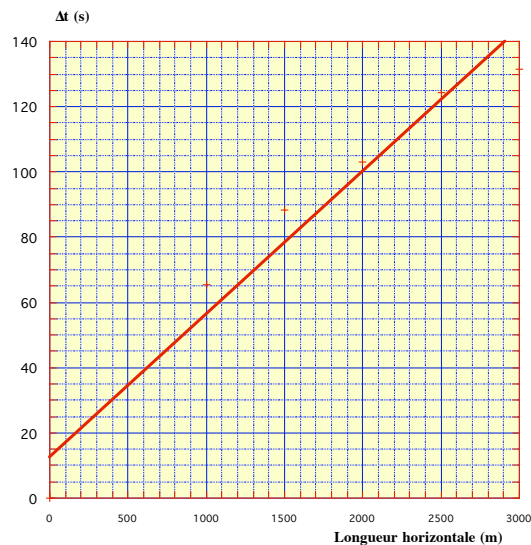


Fig. 12- Le temps de descente du spéléo en fonction de la portée

Par exemple, pour une tyrolienne de 3000 m de distance horizontale et de 1300 m de dénivellation, le personnage ne s'approchera de l'amarrage inférieur qu'à la condition de s'allonger pour diminuer le Cx. par exemple avec un CxS de 0,375, il atteindra la vitesse maximale de 173 km/h au bout de 19 s et arrivera en bout de course à la distance de 2750 m au bout de 103 s.

Pour une tyrolienne encore plus longue, il faudra une dénivellation encore plus grande (elle croît comme le carré de la portée). L'angle à l'amarrage haut augmente avec la portée. Il vaut 48° pour 3000 m.



Il est facile de voir que la limite de portée d'une tyrolienne est de l'ordre de 3,5 km avec une dénivellation de l'ordre de 2 km, ce qui n'est pas facile à trouver. Pour une telle tyrolienne, le spéléo atteindrait la vitesse de 187 km/h au bout de 19 s en se couchant dans le sens du mouvement et il serait à la distance de 3100 m au bout de 102 s (à vitesse nulle). L'angle à l'amarrage haut serait de 57°.

Ainsi, la limite d'une tyrolienne sur corde simple provient de la condition que le personnage doit arriver au voisinage du point bas, et cette condition entraîne que la dénivellation augmente plus vite que la portée, d'où la limite observée.

Conclusions

Les données retenues pour la tyrolienne sont tout à fait compatibles avec le cahier des charges adopté pour la sécurité. Il restera à vérifier qu'à aucun moment de sa trajectoire, le spéléo ne risque heurter le sol ou un obstacle quelconque (en tenant compte de la flèche due au poids du spéléo et de la flèche due au vent éventuel).

Le spéléo devra remonter la corde sur une belle longueur pour atteindre l'appui de droite. Mais c'est le prix à payer pour avoir une bonne sécurité (par rapport au risque de venir heurter l'amarrage du bas). On pourrait quand même envisager d'augmenter un peu la tension initiale de la corde.

Le test préliminaire devra être fait avec un mannequin représentatif du coefficient de frottement Cx d'un homme. L'expérience a été faite, en réalité avec deux sacs spéléos remplis de pierres et pesant 80 kg.

Bibliographie

Nous n'avons pas fait de recherche bibliographique sur ces questions, mais le rapport de Jean-Pierre Cassou fournit quelques références.

Nous renvoyons au premier rapport et aussi à ceux de Frédéric Chambat et Jean-Pierre Cassou qu'on trouvera sur le site du Spéléo-Secours Français.



Annexe - Listing des trois programmes sur Visual-Basic de Microsoft

Nous présentons les trois programmes que nous avons développés pour calculer une tyrolienne. Le premier calcule la forme statique d'une corde élastique tendue entre deux points distants de la longueur D et dont la dénivellation est H. Le logiciel fournit la forme de la corde et la longueur au repos.

Le deuxième calcule la forme prise par la corde pour un spéléo situé à différents endroits de la tyrolienne. On suppose que la vitesse du spéléo est négligeable. Les données à préciser sont la distance horizontale et la dénivellation, la longueur au repos de la corde (calculée avec le logiciel 1), l'élasticité de la corde (pour une charge de 80 kg), la tension à l'amarrage supérieur, la masse du spéléo.

Le troisième calcule la forme de la corde pour un spéléo descendant en mouvement balistique sur la corde. On tient compte des forces d'inertie aussi bien pour le spéléo que pour la corde. Le spéléo est supposé démarrer à vitesse nulle depuis le milieu du premier tronçon. Les données à entrer sont les mêmes que pour le logiciel 2, mais il faut en plus préciser le CxS du spéléo (coefficient de traînée).

Les lignes précédées d'un ' sont de simples commentaires non opérationnels en Basic.

Mise en garde : les méthodes de calculs adoptées ici sont très frustes. La méthode de Newton, instable par nature, a été systématiquement adoptée plutôt que des méthodes plus correctes comme celles de Runge-Kutta. Ce choix de simplicité des algorithmes se fait au prix d'une mauvaise stabilité des calculs numériques. Un numéricien pourrait modifier les programmes dans ce sens. Nous ne l'avons pas fait pour des questions de temps.

Nous avons mis en rouge les données que l'on doit modifier (pour une tyrolienne donnée) avant de lancer le programme. Les données indiquées correspondent à peu près à la tyrolienne du pas des Rages.

Sub Tyrol1()

```
'*****
```

```
' Programme de calcul en Visual Basic (Microsoft) d'une GRANDE TYROLIENNE STATIQUE  
' Le principe du calcul est de partir de l'amarrage supérieur (point A) et de calculer  
' de proche en proche la forme de la courbe à partir d'un angle de départ réglable  
' et d'une tension de départ réglable aussi.  
' Le bas de la corde (point B) doit correspondre à un point imposé (deux conditions).
```

```
' version du 27 juin 2008, fait par Baudouin Lismonde  
' On a pris nulle la masse du spéléo. Tyrolienne statique non chargée
```

```
'*****
```

```
Dim X(100) As Double      ' abscisses des milieux des tronçons  
Dim Z(100) As Double      ' altitudes des milieux  
Dim XT(100) As Double     ' abscisses des extrémités des tronçons  
Dim ZT(100) As Double     ' altitudes des extrémités des tronçons  
Dim T(100) As Double      ' tensions dans les tronçons du funiculaire  
Dim TETA(100) As Double   ' angles des tronçons funiculaires  
Dim TETAT(100) As Double  ' angles des tronçons tyrolienne  
Dim BT(100) As Double     ' longueurs des tronçons
```

```
Dim B0, D, DC, DEN, DENA, DETETA, DLNA, E As Double  
Dim G, H, L0, LAI, LAN, MC, NUM, NUMA, Pi, RF, TN, XB, XPP, ZB As Double
```

```
' Valeurs des différents paramètres
```

```
L0 = 1000#      ' Longueur de la corde au repos (m)
```




N% = 100 ' Nombre de tronçons
 G = 9.81 ' Accélération de la pesanteur (m/s²)
 B0 = L0 / N% ' Longueur d'un tronçon au repos (m)
 D = 1076# ' Distance horizontale de la tyrolienne (m)
 H = 240# ' Dénivellation des deux amarrages (m)
 E = 0.01 ' Élasticité relative de la corde pour une charge TN
 MC = 0.08 ' Masse linéique de la corde (en kg/m)
 DC = 0.01 ' Diamètre de la corde (m)
 TN = 800# ' Référence de tension pour l'élasticité (N) défini par $\Delta L/L = E \Delta T/TN$
 Pi = 3.1415926535

' Mise à zéro des différents tableaux ou vecteurs

For I% = 0 To N%

BT(I%) = T(I%) = TETA(I%) = TETAT(I%) = X(I%) = Z(I%) = XT(I%) = ZT(I%) = 0#

Next I%

ABC = DEN = DETETA = DLNI = LAI = LAN = NUM = MULTI = NUMA = 0#

' La tension à l'amarrage haut est fixée (en N)

T(0) = 3000#

' L'angle à l'amarrage haut n'est pas fixée, de même que la longueur initiale de la corde L0

TETA(0) = -30# * Pi / 180#

' Écriture sur la feuille 1 de quelques valeurs des paramètres

```

Sheets("Feuil1").Select
Cells(112, 1).Formula = D
Cells(112, 2).Formula = -H
Cells(3, 3).Formula = N%
Cells(2, 3).Formula = T(0)
  
```


' DÉBUT DE LA PETITE BOUCLE EN PITER%

For PITER% = 1 To 200

If PITER% = 199 Then Stop

' Balayage de la tyrolienne en I%

For I% = 1 To N%

' Calcul des nouveaux T et TETA

NUM = T(I% - 1) * Sin(TETA(I% - 1)) + MC * B0 * G

DEN = T(I% - 1) * Cos(TETA(I% - 1))

T(I%) = Sqr(NUM * NUM + DEN * DEN)

TETA(I%) = Atn(NUM / DEN)

' Coordonnées de l'extrémité droite du tronçon I%

BT(I%) = B0 * (1# + E * (T(I% - 1) + T(I%)) / 2# / TN)

TETAT(I%) = (TETA(I% - 1) + TETA(I%)) / 2#

XT(I%) = XT(I% - 1) + BT(I%) * Cos(TETAT(I%))

ZT(I%) = ZT(I% - 1) + BT(I%) * Sin(TETAT(I%))

' Coordonnées du milieu du tronçon I%

X(I%) = (XT(I% - 1) + XT(I%)) / 2#

Z(I%) = (ZT(I% - 1) + ZT(I%)) / 2#

Next I%

' FIN DU BALAYAGE EN I%



' Affichage des coordonnées de l'extrémité de la tyrolienne
' Itération sur les conditions initiales = méthode de tir PITER%

XB = XT(N%)
ZB = ZT(N%)
LAN = Sqr(XB * XB + ZB * ZB)
LAI = Sqr(D * D + H * H)
DLNI = LAN - LAI
DETETA = Atn(ZB / XB) + Atn(H / D)
' Sheets("Feuil1").Select
' Cells(5 + PITER%, 3).Formula = DLNI
' Cells(5 + PITER%, 4).Formula = DETETA

' Itération sur l'angle initial

TETA(0) = TETA(0) - 0.2 * DETETA
If Abs(DETETA * 180 / Pi) > 0.005 Then GoTo 110

' Itération sur la longueur initiale

L0 = L0 * LAI / LAN
B0 = L0 / N%

' Fin ou non des itérations en PITER%

If Abs(DLNI) > 0.1 Then GoTo 110
GoTo 10

' Retour aux valeurs initiales

110
Next PITER%

' FIN de la boucle en PITER%

10
For I% = 0 To N%
 Sheets("Feuil1").Select
 Cells(10 + I%, 1).Formula = XT(I%)
 Cells(10 + I%, 2).Formula = ZT(I%)
Next I%

' Longueur de la corde étirée

LT = 0#
For I% = 1 To N%
 LT = LT + BT(I%)
Next I%
Sheets("Feuil1").Select
 Cells(4, 3).Formula = L0
 Cells(7, 3).Formula = TETA(0) * 180# / Pi
 Cells(5, 3).Formula = LT
 Cells(6, 3).Formula = LT - L0
 Cells(8, 3).Formula = D
 Cells(9, 3).Formula = -H

' Fin du programme

120
End Sub



Sub Tyrol2()

' PAS DES RAGES-DESCENTE LENTE DU SPÉLÉO
' Programme de calcul en Visual Basic (Microsoft) d'une GRANDE TYROLIENNE
' Le principe du calcul est de partir de l'amarrage supérieur (point A) et de calculer
' de proche en proche la forme de la courbe à partir d'un angle de départ réglable
' et d'une tension de départ réglable aussi.
' Le bas de la corde (point B) doit correspondre à un point imposé (deux conditions).

' version du 28 juin 2008, fait par Baudouin Lismonde
' Pas de forces d'inertie. Seulement les poids

' Liste exhaustive des variables, vecteurs et tableaux utilisées :
' A, ASX(100), ASZ(100), AX(100,100), AZ(100,100), B0, BT(100,100), CXS, D, DC, DEN, DENA, DELTAT
' DETETA, DLNA, DZPDX, E, ERREUR, FDT, FX(100), FZ(100), G, H, I%, J%, K%, L0, LAI
' LAN, M, MC, MI%, MULTI, N%, NI%, NITER%, NJ%, NUM, NUMA, Pi, RF, RHO, T(100,100), TEM2
' TEMPS(100), TETA(100,100), TETAP(100), TETAT(100,100), TN, V(100), VP, VX(100), VZ(100), X(100,100)
' XB, XPP, XT(100,100), Z(100,100), ZB, ZT(100,100)

Dim X(100, 100) As Double ' Tableau 101 x 101 des abscisses des milieux des tronçons
Dim Z(100, 100) As Double ' Tableau 101 x 101 des altitudes des milieux
Dim XT(100, 100) As Double ' Tableau 101 x 101 des abscisses des extrémités des tronçons
Dim ZT(100, 100) As Double
Dim T(100, 100) As Double ' Tableau 101 x 101 des tensions dans les tronçons du funiculaire
Dim TETA(100, 100) As Double ' Tableau 101 x 101 des angles des tronçons funiculaires
Dim TETAT(100, 100) As Double ' Tableau 101 x 101 des angles des tronçons tyrolienne
Dim BT(100, 100) As Double ' Tableau 101 x 101 des longueurs des tronçons

Dim XP(100) As Double ' Abscisse du spéléo au cours du temps
Dim ZP(100) As Double ' Altitude du spéléo au cours du temps
Dim FX(100) As Double ' Vecteur 101 des forces horizontales de la corde sur le spéléo
Dim FZ(100) As Double ' Vecteur 101 des forces verticales de la corde sur le spéléo

Dim A, ABC, B0, CXS, D, DC, DELTAT, DEN, DENA, DETETA, DLNA, DZPDX, E, ERREUR As Double
Dim FDT, G, H, L0LAI, LAN, M, MC, MULTI, NUM, NUMA, Pi, RF, RHO, TEM2, TN, VP, XB, XPP, ZB As Double

' Valeurs des différents paramètres

L0 = 1067.5609 ' Longueur de la corde au repos (m) pour une tension à l'amarrage donnée
N% = 100 ' Nombre de tronçons
NN = 100#
G = 9.81 ' Accélération de la pesanteur (m/s2)
B0 = L0 / NN ' Longueur d'un tronçon au repos (m)
D = 1076# ' Distance horizontale de la tyrolienne (m)
H = 240# ' Dénivellation des deux amarrages (m)
E = 0.01 ' Élasticité relative de la corde pour une charge TN
MC = 0.08 ' Masse linéique de la corde (en kg/m)
DC = 0.01 ' Diamètre de la corde (m)
M = 80# ' Masse du spéléo (kg)
TN = 800# ' Référence de tension pour l'élasticité (N)
Pi = 3.1415926535

' Mise à zéro des différents tableaux ou vecteurs

For I% = 0 To N%
XP(I%) = 0#
ZP(I%) = 0#
For J% = 0 To N%
BT(I%, J%) = 0#
T(I%, J%) = 0#
TETA(I%, J%) = 0#
TETAT(I%, J%) = 0#
X(I%, J%) = 0#
Z(I%, J%) = 0#



```
XT(I%, J%) = 0#
ZT(I%, J%) = 0#
Next J%
Next I%
A = 0#
ABC = 0#
DEN = 0#
DENA = 0#
DETA = 0#
DZPDX = 0#
LAI = 0#
LAN = 0#
NUM = 0#
MULTI = 0#
NUMA = 0#
VP = 0#
'
' Les deux valeurs initiales du démarrage du calcul : tension et angle à l'amarrage haut
'
T(0, 1) = 3026#
TETA(0, 1) = -31.48 * Pi / 180#
'
' Écriture sur la feuille 1 de quelques valeurs des paramètres
'
Sheets("Feuil1").Select
Cells(19, 3).Formula = D
Cells(19, 4).Formula = -H
Cells(3, 3).Formula = N%
Cells(4, 3).Formula = L0
Cells(5, 3).Formula = B0
'
'*****
'*****
'*****
' DÉBUT DE LA BOUCLE TEMPORELLE J%
'
For J% = 1 To N%
Cells(6, 2).Formula = J%
If J% > 1 Then
T(0, J%) = T(0, J% - 1)
TETA(0, J%) = TETA(0, J% - 1)
End If
'
'*****
'*****
' DÉBUT DE LA PETITE BOUCLE EN PITER%
'
For PITER% = 1 To 400
'
' L'expression des forces (de la corde sur le spéléo)
'
FX(J%) = 0#
FZ(J%) = M * G
'
'*****
' Balayage de la tyrolienne en I%
'
For I% = 1 To N%
'
' Présence ou non du spéléo sur le tronçon I%
'
If I% = J% Then RF = 1# Else RF = 0#
'
' Calcul des nouveaux T et TETA
'
NUM = T(I% - 1, J%) * Sin(TETA(I% - 1, J%)) + MC * B0 * G + RF * FZ(J%)
DEN = T(I% - 1, J%) * Cos(TETA(I% - 1, J%)) + RF * FX(J%)
```



$T(I\%, J\%) = \text{Sqr}(\text{NUM} * \text{NUM} + \text{DEN} * \text{DEN})$

$\text{TETA}(I\%, J\%) = \text{Atn}(\text{NUM} / \text{DEN})$

' Coordonnées de l'extrémité droite du tronçon I%

$\text{BT}(I\%, J\%) = \text{B0} * (1\# + \text{E} * (\text{T}(I\% - 1, J\%) + \text{T}(I\%, J\%))) / 2\# / \text{TN}$

$\text{TETAT}(I\%, J\%) = (\text{TETA}(I\% - 1, J\%) + \text{TETA}(I\%, J\%)) / 2\#$

$\text{XT}(I\%, J\%) = \text{XT}(I\% - 1, J\%) + \text{BT}(I\%, J\%) * \text{Cos}(\text{TETAT}(I\%, J\%))$

$\text{ZT}(I\%, J\%) = \text{ZT}(I\% - 1, J\%) + \text{BT}(I\%, J\%) * \text{Sin}(\text{TETAT}(I\%, J\%))$

' Coordonnées du milieu du tronçon I%

$\text{X}(I\%, J\%) = (\text{XT}(I\% - 1, J\%) + \text{XT}(I\%, J\%)) / 2\#$

$\text{Z}(I\%, J\%) = (\text{ZT}(I\% - 1, J\%) + \text{ZT}(I\%, J\%)) / 2\#$

Next I%

' FIN DU BALAYAGE EN I%

' Affichage des coordonnées de l'extrémité de la tyrolienne

' Itération sur les conditions initiales = méthode de tir PITER%

$\text{XB} = \text{XT}(N\%, J\%)$

$\text{ZB} = \text{ZT}(N\%, J\%)$

$\text{LAN} = \text{Sqr}(\text{XB} * \text{XB} + \text{ZB} * \text{ZB})$

$\text{LAI} = \text{Sqr}(\text{D} * \text{D} + \text{H} * \text{H})$

$\text{DLNI} = \text{LAN} - \text{LAI}$

$\text{DETETA} = \text{Atn}(\text{ZB} / \text{XB}) + \text{Atn}(\text{H} / \text{D})$

$\text{TP} = \text{T}(0, J\%)$

' Itération en longueur. TP est la valeur à l'itération précédente

$\text{T}(0, J\%) = \text{TP} * (1\# - 2\# * \text{DLNI} / \text{LAI})$

If PITER% = 1 Then $\text{T}(0, J\%) = \text{TP} * (1\# - 0.2 * \text{DLNI} / \text{LAI})$

If PITER% = 2 Then $\text{T}(0, J\%) = \text{TP} * (1\# - 0.6 * \text{DLNI} / \text{LAI})$

$\text{DT} = \text{T}(0, J\%) - \text{TP}$

' Fin ou non des itérations en PITER%

If $\text{Abs}(\text{DLNI}) > 0.1$ Then GoTo 110

$\text{TETA}(0, J\%) = \text{TETA}(0, J\%) - 0.2 * \text{DETETA}$

If $\text{Abs}(\text{DETETA} * 180 / \text{Pi}) > 0.001$ Then GoTo 110

If $\text{Abs}(\text{DLNI}) < 0.01$ Then GoTo 10

' Retour aux valeurs initiales

110

Next PITER%

' FIN de la boucle en PITER%

10

Sheets("Feuil1").Select

Cells(20 + J%, 1).Formula = $\text{T}(0, J\%)$

Cells(20 + J%, 2).Formula = $\text{TETA}(0, J\%) * 180\# / \text{Pi}$

Cells(20 + J%, 3).Formula = XB

Cells(20 + J%, 4).Formula = ZB

Next J%

' FIN DE LA BOUCLE TEMPORELLE en J%

' Détermination de la trajectoire du spéléo



```
NUMA = 0#
DENA = 0#
For J% = 1 To N%
    NUMA = NUMA + (H / D * X(J%, J%) + Z(J%, J%)) * X(J%, J%) * (X(J%, J%) - D)
    DENA = DENA + X(J%, J%) * X(J%, J%) * (X(J%, J%) - D) * (X(J%, J%) - D)
Next J%
A = NUMA / DENA
Sheets("Feuil1").Select
Cells(12, 2).Formula = A
'
' Liste des points occupables par le spéléo
'
For J% = 0 To N%
    XP(J%) = X(J%, J%)
    ZP(J%) = XP(J%) * (A * (XP(J%) - D) - H / D)
Next J%
For J% = 0 To N%
    Cells(20 + J%, 6).Formula = X(J%, J%)
    Cells(20 + J%, 7).Formula = Z(J%, J%)
Next J%
For J% = 1 To 9
    JJ% = 10 * J%
    For I% = 1 To N%
        Cells(20 + I%, 8 + J%).Formula = T(I%, JJ%)
    Next I%
Next J%
LTOT = 0#
For J% = 1 To N%
    LTOT = LTOT + Sqr((XP(J%) - XP(J% - 1)) * (XP(J%) - XP(J% - 1)) + (ZP(J%) - ZP(J% - 1)) * (ZP(J%) - ZP(J% - 1)))
Next J%
Sheets("Feuil1").Select
Cells(7, 3).Formula = LTOT
'
' Fin du programme
'
Sheets("Feuil1").Select
120
End Sub
```

Sub Tyrol3d()

```
'*****
' PAS DES RAGES
' Programme de calcul en Visual Basic (Microsoft) d'une GRANDE TYROLIENNE
' Le principe du calcul est de partir de l'amarrage supérieur (point A) et de calculer
' de proche en proche la forme de la courbe à partir d'un angle de départ réglable
' et d'une tension de départ réglable aussi.
' Le bas de la corde (point B) doit correspondre à un point imposé (deux conditions).
'
' version du 29 juillet 2008, fait par Baudouin Lismonde
' LES FORCES D'INERTIE DE LA CORDE conduisent à une oscillation de la corde (on limite NITER% à 3),
' L'inertie du spéléo ne pose pas de problèmes. Mais on constate que l'inertie de la corde ne joue aucun rôle.
'*****
' Liste exhaustive des variables, vecteurs et tableaux utilisés :
' A, ASX(100), ASZ(100), AX(100,100), AZ(100,100), B0, BT(100,100), CXS, D, DC, DEN, DENA, DELTAT
' DETETA, DLNA, DZPDX, E, ERREUR, FDT, FX(100), FZ(100), G, H, I%, J%, K%, L0, LAI
' LAN, M, MC, MI%, MULTI, N%, NI%, NITER%, NJ%, NUM, NUMA, Pi, RF, RHO, T(100,100), TEM2
' TEMPS(100), TETA(100,100), TETAP(100), TETAT(100,100), TN, V(100), VP, VX(100), VZ(100), X(100,100)
' XB, XPP, XT(100,100), Z(100,100), ZB, ZT(100,100)
'
Dim X(100, 100) As Double      ' Tableau 101 x 101 des abscisses des milieux des tronçons
Dim Z(100, 100) As Double      ' Tableau 101 x 101 des altitudes des milieux
```



```

Dim XT(100, 100) As Double      ' Tableau 101 x 101 des abscisses des extrémités des tronçons
Dim ZT(100, 100) As Double
Dim T(100, 100) As Double      ' Tableau 101 x 101 des tensions dans les tronçons du funiculaire
Dim TETA(100, 100) As Double   ' Tableau 101 x 101 des angles des tronçons funiculaires
Dim TETAT(100, 100) As Double  ' Tableau 101 x 101 des angles des tronçons tyrolienne
Dim BT(100, 100) As Double     ' Tableau 101 x 101 des longueurs des tronçons
Dim AX(100, 100) As Double     ' Tableau 101 x 101 des accélérations des milieux des tronçons
Dim AZ(100, 100) As Double
'
Dim XP(100) As Double          ' Abscisse du spéléo au cours du temps
Dim ZP(100) As Double          ' Altitude du spéléo au cours du temps
Dim V(100) As Double           ' Vitesse du spéléo au cours du temps
Dim VX(100) As Double          ' Vecteur 101 des vitesses horizontales du spéléo au cours du temps
Dim VZ(100) As Double          ' Vecteur 101 des vitesses verticales du spéléo au cours du temps
Dim ASX(100) As Double         ' Vecteur 101 des accélérations horizontales du spéléo
Dim ASZ(100) As Double         ' Vecteur 101 des accélérations verticales du spéléo
Dim TEMPS(100) As Double       ' Vecteur 101 des temps de passage au N points milieux
Dim TETAP(100) As Double       ' Les différents angles de la corde au droit du spéléo
Dim FX(100) As Double          ' Vecteur 101 des forces horizontales de la corde sur le spéléo
Dim FZ(100) As Double          ' Vecteur 101 des forces verticales de la corde sur le spéléo
Dim PHI(100) As Double         ' angle du vecteur vitesse du spéléo au cours du temps
'
Dim A, ABC, ABC1, ABC2, B0, CXS, D, DC, DELTAT, DEN, DENA, DR, DETETA, DLNA, DZPDX, E, ERREUR As Double
Dim FE, FN, FR, G, H, L0, LAI, LAN, LTOT, M, MC, MULTI, NUM, NUM2, NUM3, NUMA, Pi, R, RF, RHO, T0, TEM2, TN, VP, XB, XPP, ZB As Double
'
' Valeurs des différents paramètres
'
L0 = 1067.5609      ' Longueur de la corde au repos (m)
T0 = 3000#          ' Tension de la corde à l'amarrage du haut sans spéléo
    Sheets("Feuil1").Select
    Cells(2, 3).Formula = T0
'
N% = 100            ' Nombre de tronçons
G = 9.81            ' Accélération de la pesanteur (m/s2)
B0 = L0 / N%        ' Longueur d'un tronçon au repos (m)
D = 1076#           ' Distance horizontale de la tyrolienne (m)
H = 240#            ' Dénivellation des deux amarrages (m)
E = 0.01            ' Élasticité relative de la corde pour une charge TN
MC = 0.08           ' Masse linéique de la corde (en kg/m)
DC = 0.01           ' Diamètre de la corde (m)
M = 80#             ' Masse du spéléo (kg)
TN = 800#           ' Référence de tension pour l'élasticité (N)
RHO = 1.1           ' Masse volumique de l'air (en kg/m3)
CXS = 0.75 * (M / 80#) ^ 0.67 ' Produit du coefficient Cx par le maître couple (0,75 en m2)
R = 0.025           ' R est le rayon du réa de la poulie
DR = 0.01           ' Diamètre au niveau du roulement à bille de la poulie
FN = 0.2            ' Coefficient de frottement nylon sur nylon (à préciser)
FR = 0.015          ' Coefficient de frottement au niveau du roulement de la poulie
FE = (FR * DR + FN * DC) / 2# / R ' Coefficient de frottement équivalent
K% = N%             ' K% est le rang du dernier point atteint sur la corde par le spéléo
Pi = 3.1415926535
'
' Mise à zéro des différents tableaux ou vecteurs
'
For I% = 0 To N%
    ASX(I%) = 0#
    ASZ(I%) = 0#
    FX(I%) = 0#
    FZ(I%) = 0#
    PHI(I%) = 0#
    TEMPS(I%) = 0#
    V(I%) = 0#
    VX(I%) = 0#
    VZ(I%) = 0#
    XP(I%) = 0#

```



```
ZP(I%) = 0#
For J% = 0 To N%
  AX(I%, J%) = 0#
  AZ(I%, J%) = 0#
  BT(I%, J%) = 0#
  T(I%, J%) = 0#
  TETA(I%, J%) = 0#
  TETAT(I%, J%) = 0#
  TETAP(J%) = 0#
  XT(I%, J%) = 0#
  ZT(I%, J%) = 0#
Next J%
Next I%
A = 0#
ABC = 0#
ABC1 = 0#
ABC2 = 0#
DEN = 0#
DENA = 0#
DETA = 0#
DZPDX = 0#
LAI = 0#
LAN = 0#
LTOT = 0#
NUM = 0#
NUM2 = 0#
NUM3 = 0#
MULTI = 0#
NUMA = 0#
TEM2 = 0#
VP = 0#
XPP = 0#
'For I% = 0 To N%
'  valeurx = Cells(12, 20 + I%)
'  valeurz = Cells(13, 20 + I%)
'  X(I%, 0) = valeurx
'  Z(I%, 0) = valeurz
'Next I%
'
' Les deux valeurs initiales du démarrage du calcul : tension et angle à l'amarrage haut
'
T(0, 0) = 4000#
TETA(0, 0) = -31# * Pi / 180#
'
' Écriture sur la feuille 1 de quelques valeurs des paramètres
'
Sheets("Feuil1").Select
Cells(19, 3).Formula = D
Cells(19, 4).Formula = -H
Cells(3, 3).Formula = N%
Cells(4, 3).Formula = L0
'
'*****
'*****
'*****
'*****
' DEBUT DE LA GRANDE BOUCLE D'ITÉRATION DYNAMIQUE EN NITER%
'
For NITER% = 1 To 3
  Sheets("Feuil1").Select
  Cells(5, 2).Formula = NITER%
'
'*****
'*****
'*****
' DÉBUT DE LA BOUCLE TEMPORELLE J%
'
```




```
For J% = 1 To N%
  Cells(6, 2).Formula = J%
  T(0, J%) = T(0, J% - 1)
  TETA(0, J%) = TETA(0, J% - 1)
,
*****
*****
' DÉBUT DE LA PETITE BOUCLE d'itération EN PITER%
,
For PITER% = 1 To 500
,
' L'expression des forces (de la corde sur le spéléo) au début du calcul
' On suppose que le spéléo est sur descendeur sur une corde parallèle à la tyrolienne
' La force normale à la corde vaut M G sin teta et on projette cette force
,
If NITER% = 1 And PITER% = 1 Then
  FX(J%) = -M * G * Cos(TETAT(J% - 1, J%)) * Sin(TETAT(J% - 1, J%))
  FZ(J%) = M * G * Cos(TETAT(J% - 1, J%)) * Cos(TETAT(J% - 1, J%))
End If
If NITER% = 1 And PITER% > 1 Then
  FX(J%) = -M * G * Cos(TETAT(J%, J%)) * Sin(TETAT(J%, J%))
  FZ(J%) = M * G * Cos(TETAT(J%, J%)) * Cos(TETAT(J%, J%))
End If
,
*****
' Balayage de la tyrolienne en I%
,
For I% = 1 To N%
,
' Présence ou non du spéléo sur le tronçon I%
,
RF = 0#
If I% = J% Then RF = 1#
,
' Calcul des nouveaux T et TETA du funiculaire
,
NUM = T(I% - 1, J%) * Sin(TETA(I% - 1, J%)) + MC * B0 * (G + AZ(I%, J%)) + RF * FZ(J%)
DEN = T(I% - 1, J%) * Cos(TETA(I% - 1, J%)) + MC * B0 * AX(I%, J%) + RF * FX(J%)
T(I%, J%) = Sqr(NUM * NUM + DEN * DEN)
TETA(I%, J%) = Atn(NUM / DEN)
,
' Coordonnées de l'extrémité droite du tronçon I% de la tyrolienne
,
BT(I%, J%) = B0 * (1# + E * (T(I% - 1, J%) + T(I%, J%)) / 2# / TN)
TETAT(I%, J%) = (TETA(I% - 1, J%) + TETA(I%, J%)) / 2#
XT(I%, J%) = XT(I% - 1, J%) + BT(I%, J%) * Cos(TETAT(I%, J%))
ZT(I%, J%) = ZT(I% - 1, J%) + BT(I%, J%) * Sin(TETAT(I%, J%))
,
' Coordonnées du milieu du tronçon I%
,
X(I%, J%) = (XT(I% - 1, J%) + XT(I%, J%)) / 2#
Z(I%, J%) = (ZT(I% - 1, J%) + ZT(I%, J%)) / 2#
Next I%
,
' FIN DU BALAYAGE EN I%
*****
,
' Affichage des coordonnées de l'extrémité de la tyrolienne
' Itération sur les conditions initiales = méthode de tir PITER%
,
XB = XT(N%, J%)
ZB = ZT(N%, J%)
LAN = Sqr(XB * XB + ZB * ZB)
LAI = Sqr(D * D + H * H)
DLNI = LAN - LAI
DETETA = Atn(ZB / XB) + Atn(H / D)
TP = T(0, J%)
```



```

' Itération en longueur. TP est la valeur à l'itération précédente
'
T(0, J%) = TP * (1# - 2# * DLNI / LAI)
If PITER% = 1 Then T(0, J%) = TP * (1# - 0.2 * DLNI / LAI)
If PITER% = 2 Then T(0, J%) = TP * (1# - 0.6 * DLNI / LAI)
DT = T(0, J%) - TP
'
' Fin ou non des itérations en PITER%
'
If Abs(DLNI) > 0.05 Then GoTo 110
TETA(0, J%) = TETA(0, J%) - 0.2 * DETETA
If Abs(DETETA * 180 / Pi) > 0.0005 Then GoTo 110
If Abs(DLNI) < 0.5 Then GoTo 10
'
' Retour aux valeurs initiales
'
110
Next PITER%
'
' FIN de la boucle en PITER%
*****
*****
'
10
  Sheets("Feuil1").Select
  Cells(20 + J%, 1).Formula = T(0, J%)
  Cells(20 + J%, 2).Formula = TETA(0, J%) * 180# / Pi
  Cells(20 + J%, 3).Formula = XB
  Cells(20 + J%, 4).Formula = ZB
Next J%
'
' FIN DE LA BOUCLE TEMPORELLE en J%
*****
*****
'
' Détermination de la trajectoire du spéléo
'
NUMA = 0#
DENA = 0#
For J% = 1 To N%
  NUMA = NUMA + (H / D * X(J%, J%) + Z(J%, J%)) * X(J%, J%) * (X(J%, J%) - D)
  DENA = DENA + X(J%, J%) * X(J%, J%) * (X(J%, J%) - D) * (X(J%, J%) - D)
Next J%
A = NUMA / DENA
  Sheets("Feuil1").Select
  Cells(12, 2).Formula = A
'
' Liste des points occupables par le spéléo
'
For J% = 0 To N%
  XP(J%) = X(J%, J%)
  ZP(J%) = XP(J%) * (A * (XP(J%) - D) - H / D)
  DZPDX = 2# * A * XP(J%) - A * D - H / D
  PHI(J%) = Atn(DZPDX)
  TETAP(J%) = TETAT(J%, J%)
Next J%
For J% = 0 To N%
  Sheets("Feuil1").Select
  Cells(20 + J%, 7).Formula = X(J%, J%)
  Cells(20 + J%, 8).Formula = Z(J%, J%)
  Cells(20 + J%, 10).Formula = TETAP(J%) * 180 / Pi
  Cells(20 + J%, 11).Formula = PHI(J%) * 180 / Pi
Next J%
'
' Détermination des n vitesses du spéléo, des points réellement occupés, et des temps

```



TEMPS(0) = 0#

ERREUR = 0#

K% = N%

' Valeurs de V et Temps pour J% = 1 et 2. Le spéléo démarre à l'arrêt au point 1

V(1) = 0#

TEMPS(1) = 0#

TEMPS(2) = Sqr(-2# * B0 / G / Sin(TETA(0, 1)))

V(2) = -G * Sin(TETA(0, 1) * TEMPS(2))

' Calcul général pour J%, par itération (car V(J%) n'est pas connu)

For J% = 3 To N%

V(J%) = V(J% - 1)

DELTAT = 0.75

' début de l'itération

For IJ% = 1 To 20

VJP = (V(J%) + V(J% - 1)) / 2#

MULTI = G * Sin(PHI(J%)) + FE * G * Cos(PHI(J%)) * Cos(PHI(J%) - TETAP(J%))

MULTI = MULTI + 0.5 * RHO * CXS / M * Abs(VJP) * VJP

VP = V(J% - 1) - DELTAT * MULTI

XPP = XP(J% - 1) + VP * Cos(PHI(J%)) * DELTAT

DELTAT = DELTAT * Abs((XP(J%) - XP(J% - 1)) / (XPP - XP(J% - 1)))

Next IJ%

V(J%) = V(J% - 1) - DELTAT * MULTI

If V(J%) < 0# Then

K% = J%

V(J%) = 0#

End If

If V(J%) = 0# Then GoTo 112

TEMPS(J%) = TEMPS(J% - 1) + DELTAT

ERREUR = ERREUR + Abs(XPP - XP(J%))

Next J%

112

Sheets("Feuil1").Select

Cells(10, 2).Formula = K%

Cells(13, 2).Formula = ERREUR

' Mise à zéro des grandeurs après l'arrêt du spéléo

For J% = K% To N%

V(J%) = 0#

TEMPS(J%) = (TEMPS(K% - 1) * V(K% - 2) - TEMPS(K% - 2) * V(K% - 1)) / (V(K% - 2) - V(K% - 1))

ASX(J%) = 0#

ASZ(J%) = 0#

Next J%

For I% = 1 To N%

For J% = K% To N%

AX(I%, J%) = 0#

AZ(I%, J%) = 0#

Next J%

Next I%

For J% = 1 To K% - 1

VX(J%) = V(J%) * Cos(PHI(J%))

VZ(J%) = V(J%) * Sin(PHI(J%))

Next J%

For J% = 0 To N%

Sheets("Feuil1").Select

Cells(20 + J%, 6).Formula = TEMPS(J%)

Cells(20 + J%, 9).Formula = V(J%)

Next J%

' Copie des résultats sur le tableur

' Sheets("Feuil1").Select

' For I% = 1 To N%

' For J% = 1 To N%

' Cells(I% + 70, J% + 1).Formula = XT(I%, J%)

' Cells(I% + 122, J% + 1).Formula = ZT(I%, J%)



```
' Next J%
'Next I%
```

```
' Calcul de l'accélération d'un tronçon de la corde
```

```
X(0, 2) = -B0 * Cos(TETA(0, 2))
```

```
Z(0, 2) = B0 * Sin(TETA(0, 2))
```

```
For I% = 2 To N%
```

```
For J% = 2 To K% - 3
```

```
TEM2 = (TEMPS(J% + 1) - TEMPS(J%)) * (TEMPS(J%) - TEMPS(J% - 1))
```

```
TEM2 = TEM2 * (TEMPS(J% + 1) - TEMPS(J% - 1))
```

```
NUM2 = (X(I%, J% + 1) - X(I%, J%)) * (TEMPS(J%) - TEMPS(J% - 1))
```

```
NUM2 = NUM2 - (X(I%, J%) - X(I%, J% - 1)) * (TEMPS(J% + 1) - TEMPS(J%))
```

```
AX(I%, J%) = 2# * NUM2 / TEM2
```

```
NUM3 = (Z(I%, J% + 1) - Z(I%, J%)) * (TEMPS(J%) - TEMPS(J% - 1))
```

```
NUM3 = NUM3 - (Z(I%, J%) - Z(I%, J% - 1)) * (TEMPS(J% + 1) - TEMPS(J%))
```

```
AZ(I%, J%) = 2# * NUM3 / TEM2
```

```
Next J%
```

```
Next I%
```

```
'For I% = 1 To N% - 1
```

```
' For J% = 2 To K% - 4
```

```
' AX(I%, J%) = (AX(I% - 1, J%) + 3 * AX(I%, J%) + AX(I% + 1, J%)) / 5#
```

```
' AX(I%, J%) = (AX(I% - 1, J%) + 3 * AX(I%, J%) + AX(I% + 1, J%)) / 5#
```

```
' Next J%
```

```
'Next I%
```

```
Sheets("Feuill").Select
```

```
Cells(14, 1).Formula = AX(3, 2)
```

```
Cells(14, 2).Formula = AZ(3, 2)
```

```
Cells(14, 3).Formula = AX(4, 2)
```

```
Cells(14, 4).Formula = AZ(4, 2)
```

```
' Calcul de l'accélération du spéléo
```

```
ASX(1) = 0#
```

```
ASZ(1) = 0#
```

```
For J% = 2 To K% - 2
```

```
TEM2 = (TEMPS(J% + 1) - TEMPS(J%)) * (TEMPS(J%) - TEMPS(J% - 1))
```

```
TEM2 = TEM2 * (TEMPS(J% + 1) - TEMPS(J% - 1))
```

```
NUM2 = (X(J% + 1, J% + 1) - X(J%, J%)) * (TEMPS(J%) - TEMPS(J% - 1))
```

```
NUM2 = NUM2 - (X(J%, J%) - X(J% - 1, J% - 1)) * (TEMPS(J% + 1) - TEMPS(J%))
```

```
ASX(J%) = 2# * NUM2 / TEM2
```

```
NUM3 = (Z(J% + 1, J% + 1) - Z(J%, J%)) * (TEMPS(J%) - TEMPS(J% - 1))
```

```
NUM3 = NUM3 - (Z(J%, J%) - Z(J% - 1, J% - 1)) * (TEMPS(J% + 1) - TEMPS(J%))
```

```
ASZ(J%) = 2# * NUM3 / TEM2
```

```
Next J%
```

```
Sheets("Feuill").Select
```

```
Cells(15, 1).Formula = ASX(2)
```

```
Cells(15, 2).Formula = ASZ(2)
```

```
Cells(15, 3).Formula = ASX(3)
```

```
Cells(15, 4).Formula = ASZ(3)
```

```
' Calcul de la force exercée par la corde sur le spéléo
```

```
For J% = 2 To K% - 2
```

```
FX(J%) = M * ASX(J%) + 0.5 * RHO * CXS * VX(J%) * Abs(V(J%))
```

```
FZ(J%) = M * (ASZ(J%) + G) + 0.5 * RHO * CXS * VZ(J%) * Abs(V(J%))
```

```
Next J%
```

```
FX(1) = 0#
```

```
FZ(1) = M * G
```

```
For J% = K% - 1 To N%
```

```
FX(J%) = 0#
```

```
FZ(J%) = M * G
```

```
Next J%
```

```
Cells(16, 1).Formula = FX(1)
```

```
Cells(16, 2).Formula = FZ(1)
```

```
Cells(16, 3).Formula = FX(2)
```

```
Cells(16, 4).Formula = FZ(2)
```



Next NITER%

' FIN DE LA GRANDE BOUCLE d'itération NITER%

For I% = 0 To N%

For J% = 1 To 9

JJ% = 10 * J%

Cells(20 + I%, 10 + 2 * J%).Formula = XT(I%, JJ%)

Cells(20 + I%, 11 + 2 * J%).Formula = ZT(I%, JJ%)

Next J%

Next I%

' Détermination de la distance parcourue par le spéléo

LTOT = 0#

For J% = 1 To N%

ABC1 = (X(J%, J%) - X(J% - 1, J% - 1)) * (X(J%, J%) - X(J% - 1, J% - 1))

ABC2 = (Z(J%, J%) - Z(J% - 1, J% - 1)) * (Z(J%, J%) - Z(J% - 1, J% - 1))

LTOT = LTOT + Sqr(ABC1 + ABC2)

Next J%

Cells(7, 3).Formula = LTOT + B0 / 2#

' Fin du programme

120

End Sub