



Calcul d'une grande tyrolienne (1)

(calcul sur tableur du genre Excel)

Baudouin Lismonde, version du 1^{er} janvier 2009

À l'occasion du congrès européen de spéléologie : Vercors 2008, les organisateurs ont installé une tyrolienne de plus d'un kilomètre de portée avec une dénivellation entre les deux attaches.

Pour aider à la réalisation de ce projet, nous avons fait plusieurs calculs que nous présentons ci-après. Tout d'abord, nous déterminerons la forme analytique d'une corde inélastique pour une certaine tension à l'amarrage supérieur. Ensuite nous examinerons l'influence de l'élasticité, mais sous forme d'une résolution numérique. Puis, nous ferons descendre le long de la corde un personnage à vitesse très lente (quasi-statique) et calculerons les différentes formes prises par la corde au cours du temps. Enfin, nous prendrons en compte les forces de freinage dues à l'air et les forces d'inertie liées au spéléo ou à la corde elle-même. Et nous calculerons la loi horaire de parcours du spéléo au cours de la descente.

Le réglage de la tension de la corde s'est fait au point haut au dynamomètre. Cette tension est le facteur de réglage principal de la tyrolienne.

Jean-Pierre Cassou et le trio : Frédéric Chambat, Laurent Morel et Stéphane Lips ont travaillé aussi sur cette question d'une manière relativement indépendante. On pourra lire leurs notes de calcul avec profit.

Les caractéristiques retenues ici pour les applications numériques de la tyrolienne sont les suivantes :

Longueur horizontale :	$D = 1280 \text{ m}$
Dénivellation H entre les deux amarrages :	$H = 264 \text{ m}$
Élasticité de la corde :	$e = 0,02 = \Delta L/L$ pour une charge de 80 kg
Masse au mètre linéaire :	$m = 0,08 \text{ kg/m}$
Masse du spéléo :	$M = 80 \text{ kg}$
Tension à l'amarrage haut (sans charge) :	$T_0 = 2500 \text{ N}$
Sollicitation maximale :	$T_m = 4500 \text{ N}$



Notations

b	longueur d'un tronçon au repos (m)
b'	longueur du tronçon sous tension (m)
c, c'	longueurs de contact de la corde sur le réa
ch	cosinus hyperbolique
Cx	coefficient de traînée
d	diamètre de la corde (m)
D	portée horizontale de la tyrolienne (m)
e	élasticité de la corde
Ei	points aux extrémités des tronçons
f	coefficient de frottement du nylon sur lui-même (on a pris $f = 0,2$)
f	coefficient de frottement équivalent d'un palier
f'	coefficient de frottement équivalent d'un palier (0,015)
f*	coefficient de frottement équivalent pour les forces de freinage (autre que vent)
F	force de la corde sur les spéléo+poulie (N)
F _D , F _T	forces induites par les frottements (N)
g	accélération de la pesanteur ($9,81 \text{ m s}^{-2}$)
h	épaisseur du film de graisse (m)
H	dénivellation des appuis (m)
k	vecteur unitaire vertical, ou nombre entier
L	distance entre les appuis (m)
m	masse linéique de la corde (kg/m)
n	nombre de tronçons retenus
M	masse du spéléo (kg)
Mi	points au milieu des tronçons
P	puissance des forces de frottement (W)
Rc	rayon de courbure de la trajectoire (m)
R	rayon du réa de la poulie (m)
s	abscisse curviligne le long de la corde (m)
s	largeur d'une lanière de la corde (m)
St	longueur curviligne totale de la corde (m)
S	maître-couple du spéléo (m^2)
sh	sinus hyperbolique
t	temps (s)
T	tension de la corde (en N)
u	vitesse horizontale du spéléo (m/s)
V	vecteur vitesse du spéléo (m/s)
V _T , V _x	vitesse des ondes transverses et longitudinales (m/s)
W	travail de la dissipation (J)
x	abscisse horizontale (m)
y	coordonnée transversale horizontale
z	ordonnée verticale (m)
α	angle d'inclinaison de la corde sous le vent (rd)
β	angle de déviation de la corde (rd)
Δr	espace ou jeu entre l'axe et le réa de la poulie
ρ	masse volumique de l'air ($1,1 \text{ kg/m}^3$)
θ	angle de la corde/horizontale
μ	viscosité dynamique de la graisse (Pa s)
ω	vitesse de rotation du réa de la poulie (rd/s)

1- Forme d'une corde tendue inélastique

On sait que la forme d'une corde tendue est une chaînette (cosinus hyperbolique). Ce résultat n'est valable que si on néglige l'allongement de la corde sous l'effet de la tension variable tout au long de la courbe. Nous allons le redémontrer et trouver l'équation de cette corde en fonction des deux paramètres retenus : tension de la corde à l'amarrage supérieur T_0 , et la masse linéique m de la corde.

Aspect discrétisé

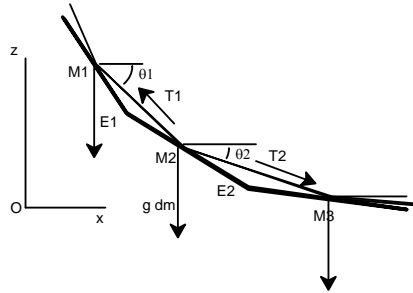


Fig. 1- Le schéma des forces locales sur un tronçon de corde de longueur ds
 La polygonale $E_1-E_2-E_3$ est la tyrolienne
 La polygonale $M_1-M_2-M_3$ sera nommée *polygone funiculaire*

On considère un élément de longueur Δs de la corde. Le point M_2 , milieu du tronçon de corde E_1-E_2 de longueur Δs et de masse $m \Delta s$ est soutenu par les deux tensions T_1 et T_2 dont les directions ne sont pas tout à fait identiques (θ_1 pour l'un et θ_2 pour l'autre). L'angle moyen, du tronçon de la tyrolienne E_1-E_2 pourra être pris égal à $(\theta_1 + \theta_2)/2$. De même la tension moyenne du tronçon pourra être prise égale à $(T_1 + T_2)/2$. Une tension sera toujours comptée positive.

Équations continues

On supposera connue la tension T_0 de la corde à l'amarrage de gauche et la pente de la corde au niveau de cet amarrage $\tan \theta_0$. Ce dernier paramètre est relié à la dénivellation H entre les deux extrémités de la corde et la distance horizontale D (portée de l'installation) et on le calculera à la fin.

On écrit les deux équations qui traduisent, dans le repère cartésien Oxz , l'équilibre statique de ce segment AB . Il n'y a pas de force extérieure dans la direction x , seulement le poids dans la direction z :

$$d(T \cos \theta) = 0 \tag{1}$$

$$d(T \sin \theta) = m g ds \tag{2}$$

Dans cette équation écrite en un point M du polygone funiculaire (rendu courbe par la longueur petite des tronçons), ds représente un élément de longueur (un tronçon de la tyrolienne) et T la tension sur le polygone funiculaire. Nous adoptons le sens trigonométrique pour l'angle θ . Les angles θ au voisinage de l'amarrage de gauche sont donc tous négatifs. À droite en revanche, ils peuvent être positifs ou négatifs suivant que la corde présente une flèche ou non.

Tension de la corde. La première équation s'intègre directement sous la forme :

$$T = \frac{C}{\cos \theta}$$



On calcule la constante C au niveau de l'amarrage de gauche :

$$T_0 = \frac{C}{\cos \theta_0} \Rightarrow C = T_0 \cos \theta_0$$

$$T = T_0 \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}$$

Ainsi la tension de la corde est minimale au point de tangente horizontale, et maximale au point d'amarrage de gauche (le plus haut).

Longueur de corde. La deuxième équation devient (en utilisant les résultats de la première équation) :

$$T \sin \theta + C' = m g s \Rightarrow s = \frac{T_0 \cos \theta_0}{m g} (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \theta_0)$$

Cette équation fournit la longueur de la corde jusqu'à obtenir l'angle θ .

Forme de la courbe. On obtient l'équation de la courbe à partir de la 2e relation, en remplaçant la longueur ds par son expression en fonction de x et z :

$$T_0 \cos \theta_0 d(\operatorname{tg} \theta) = m g ds = m g \sqrt{dx^2 + dz^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{m g}{T_0 \cos \theta_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2}$$

En posant : $y = \frac{dz}{dx}$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y^2}} = \frac{m g}{T_0 \cos \theta_0}$$

Cette équation s'intègre (avec $y_0 = \operatorname{tg} \theta_0$) :

$$\frac{m g}{T_0 \cos \theta_0} x = \operatorname{Argsh} y - \operatorname{Argsh} y_0 \Rightarrow y = \frac{dz}{dx} = \operatorname{sh} \left[\frac{m g}{T_0 \cos \theta_0} x + \operatorname{Argsh} y_0 \right] \quad (3)$$

On intègre une deuxième fois :

$$z = \frac{T_0 \cos \theta_0}{m g} \left\{ \operatorname{ch} \left[\frac{m g}{T_0 \cos \theta_0} x + \operatorname{Argsh} (\operatorname{tg} \theta_0) \right] - \operatorname{ch} [\operatorname{Argsh} (\operatorname{tg} \theta_0)] \right\}$$

Soit encore :

$$z = \frac{T_0}{m g} \left\{ \cos \theta_0 \operatorname{ch} \left[\frac{m g}{T_0 \cos \theta_0} x + \operatorname{Argsh} (\operatorname{tg} \theta_0) \right] - 1 \right\}$$

C'est l'équation d'une chaînette dont l'origine en x et z est l'amarrage supérieur.

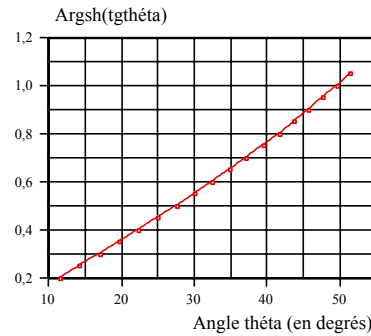


Fig. 2- Courbe montrant la fonction $\text{Argsh}(\text{tg}\theta_0)$

On peut développer le "ch" pour obtenir la relation équivalente :

$$z = \frac{T_0}{m g} \left\{ \text{ch} \left(\frac{m g}{T_0 \cos \theta_0} x \right) + \sin \theta_0 \text{sh} \left(\frac{m g}{T_0 \cos \theta_0} x \right) - 1 \right\}$$

On calcule l'abscisse x_m du point de pente nulle de la chaînette par la relation (3) :

$$x_m = - \frac{T_0 \cos \theta_0}{m g} \text{Arg sh} (\text{tg} \theta_0)$$

Pour une distance de valeur D donnée (portée de la tyrolienne), on trouve la dénivellation H entre l'amarrage supérieur et l'amarrage inférieur :

$$H = - \frac{T_0}{m g} \left\{ \cos \theta_0 \text{ch} \left[\frac{m g}{T_0 \cos \theta_0} D + \text{Arg sh} (\text{tg} \theta_0) \right] - 1 \right\}$$

Ou encore, d'une façon équivalente :

$$H = - \frac{T_0}{m g} \left\{ \text{ch} \left(\frac{m g D}{T_0 \cos \theta_0} \right) + \sin \theta_0 \text{sh} \left(\frac{m g D}{T_0 \cos \theta_0} \right) - 1 \right\}$$

Cette relation lie l'angle à l'amarrage θ_0 et la dénivellation H . Elle est transcendante et doit être résolue numériquement si on veut calculer l'angle à partir de la dénivellation H des amarrages.

La relation pour que la tyrolienne soit creuse (avec un point bas plus bas que l'amarrage inférieur) est que x_m soit inférieure à D , c'est-à-dire :

$$x_m < D \Leftrightarrow - \cos \theta_0 \text{Arg sh} (\text{tg} \theta_0) < \frac{m g D}{T_0}$$

Le point bas de la tyrolienne se calcule au point $x = x_1$ (horizontal) :

$$z_m = - \frac{T_0 \cos \theta_0}{m g} \text{ch} [\text{Arg sh} (\text{tg} \theta_0)] = - \frac{T_0}{m g}$$

La pente de la corde à l'extrémité droite se calcule par la relation :

$$\text{tg} (\theta_1) = \left(\frac{dz}{dx} \right)_{x=D} = \text{sh} \left[\frac{m g}{T_0 \cos \theta_0} D + \text{Arg sh} (\text{tg} \theta_0) \right]$$

Soit encore :

$$\text{tg} (\theta_1) = \frac{1}{\cos \theta_0} \text{sh} \left(\frac{m g D}{T_0 \cos \theta_0} \right) + \text{tg} \theta_0 \text{ch} \left(\frac{m g D}{T_0 \cos \theta_0} \right)$$



La longueur totale de la corde se trouve par :

$$St = \frac{T_0 \cos \theta_0}{m g} (\operatorname{tg} \theta_1 - \operatorname{tg} \theta_0)$$

Exemple numérique (calcul fait par tableur) :

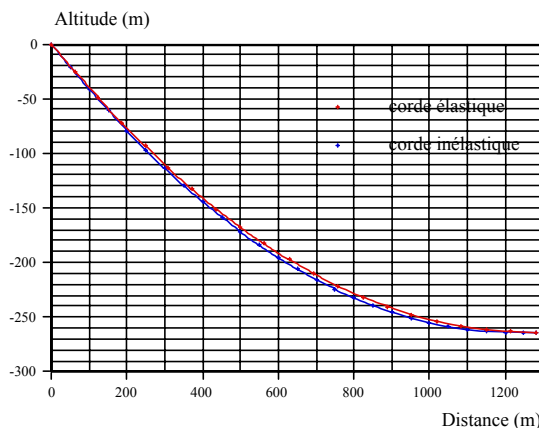


Fig.3- Comparaison entre la forme de la corde inélastique (en bleu) et élastique (en rouge) pour la même tension à l'amarrage et le même poids linéique au repos

En prenant les valeurs indiquées dans l'introduction et une élasticité nulle, on trouve que la corde présente un angle de $-23,51^\circ$ à l'amarrage de gauche et un angle de $+0,91^\circ$ à l'amarrage de droite. Le creux est donc à peine marqué. La longueur de la corde se déduit de la formule trouvée plus haut :

$$L = \frac{T_0 \cos \theta_0}{m g} (\operatorname{tg} \theta_1 - \operatorname{tg} \theta_0) = \frac{2500 \cos 23,51}{0,08 \cdot 9,81} (\operatorname{tg} 0,91 + \operatorname{tg} 23,51) = 1317 \text{ m}$$

La comparaison de la corde obtenue avec la chaînette et la corde qu'on obtiendra au chapitre suivant numériquement, montre que la différence est faible. La corde élastique tendue est un peu plus légère (1244 m) que l'autre (1317 m de long) de sorte qu'elle est plus rectiligne.

2- Calcul numérique d'une corde élastique

Condition d'installation. On installe la corde et on la tire jusqu'à obtenir une tension donnée. Cette tension est la tension à vide à l'amarrage le plus haut. On la note T_0 . Cette tension étant donnée, on calcule la forme à vide de la tyrolienne et en particulier l'angle par rapport à l'horizontale de la corde à l'appui haut (noté θ_0) et la longueur totale de la corde L .

2-1- Notations et conditionnement du calcul

On appelle m la masse linéique de la corde (par exemple $0,08 \text{ kg/m}$) sans charge. On appelle e l'élasticité de la corde (sans dimension) vérifiant la relation $dL/L = e T/T_n$ avec T la tension (en N), T_n est une tension caractéristique, par exemple 800 N , et L la longueur de la corde (en m). On pourra prendre $e = 0,02 = 2\%$ par exemple.

On découpe par la pensée la corde au repos en n tronçons de longueur $b = L/n$. Les extrémités des tronçons sont notées E_i alors que les milieux des tronçons sont notés M_i . La courbe polygonale qui passe par les points E est la tyrolienne. La ligne polygonale qui passe par les milieux M_n nous l'appellerons *polygone funiculaire* (pour le distinguer de l'autre). Ces deux polygones sont très voisins et coïncident si le nombre de tronçons tend vers l'infini. De part et d'autre du milieu du tronçon i (i variant entre 1 et n), les tensions du polygone funiculaire sont notées T_{i-1} et T_i . Le segment i , subit une tension qui vaut $(T_{i-1} + T_i)/2$. Les angles



d'inclinaison des tensions (polygone funiculaire) sont notées θ_{i-1} et θ_i .

Une fois en charge, chaque tronçon est supposé rectiligne de longueur b'_i , b' étant la longueur après allongement de la corde due à l'élasticité de celle-ci.

$$b'_i = b \left(1 + e \frac{T_{i-1} + T_i}{2} \right)$$

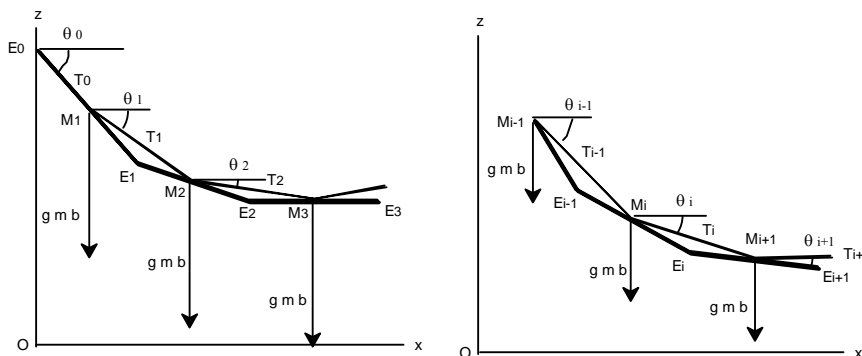


Fig. 4- La corde est formée de tronçons de mêmes masses ($E_{i-1}-E_i$), dont les poids sont appliqués aux milieux M_i

Les tensions passent par les points M_i

On appellera la polygone des points $M_1 M_2 \dots M_i$: polygone funiculaire.

La polygone des tronçons E_1, E_2, E_3 est la tyrolienne

2-2- Méthode de calcul et obtention de la solution

On part du point supérieur de l'amarrage de la corde (E_0). On se donne arbitrairement l'angle initial de la corde θ_0 . On connaît la tension à l'amarrage T_0 . On calcule les coordonnées du point extrémité du premier tronçon (E_1). On en déduit le nouvel angle d'inclinaison θ_1 du segment du polygone funiculaire par l'équation de la statique.

Et l'on continue de proche en proche.

Calcul le long de la corde, équations de passage. Supposons connues les coordonnées de l'extrémité gauche (E_{i-1}) du tronçon i , calculons celles de l'extrémité droite (E_i). La tension T_{i-1} est connue, de même que θ_{i-1} . On écrit les deux équations statiques au point M_i du polygone funiculaire.

$$T_{i-1} \cos \theta_{i-1} = T_i \cos \theta_i$$

$$T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + m g b = T_i \sin \theta_i$$

Ces deux équations à deux inconnues nous fournissent θ_i et T_i en fonction des valeurs précédentes. On calcule $\cos \theta$ par la première relation et $\sin \theta$ par la deuxième et l'on fait la somme des carrés (qui vaut 1) :

$$T_{i-1}^2 \cos^2 \theta_{i-1} + [T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + m g b]^2 = T_i^2$$

Cette équation nous donne T_i .

$$T_i = \sqrt{T_{i-1}^2 + 2 T_{i-1} m g b \sin \theta_{i-1} + (m g b)^2}$$

Ayant calculé T_i , on déduit θ en faisant le rapport de l'équation 2 sur l'équation 1 (membre à membre) :

$$\theta_i = \text{Arctg} \left(\frac{T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + m g b}{T_{i-1} \cos \theta_{i-1}} \right)$$



Coordonnées de l'extrémité droite du tronçon courant. On calcule ensuite les coordonnées de l'extrémité droite du tronçon i de la tyrolienne par les relations :

$$x_i = x_{i-1} + b \left(1 + e \frac{T_{i-1} + T_i}{2 T_n} \right) \cos \left(\frac{\theta_{i-1} + \theta_i}{2} \right)$$

$$z_i = z_{i-1} + b \left(1 + e \frac{T_{i-1} + T_i}{2 T_n} \right) \sin \left(\frac{\theta_{i-1} + \theta_i}{2} \right)$$

2-3- Fin du calcul et itération pour assurer les conditions aux limites

Quand on arrive au dernier point de coordonnées x_n et z_n , ce point doit être le point bas de l'amarrage (dénivellation H et portée D). Ces deux conditions sont en rapport avec le choix arbitraire de la longueur de la corde et de l'inclinaison. On revient au début du calcul et l'on modifie la valeur de b pour assurer la portée D (une simple règle de 3), ce qui entraîne une modification de la tension d'amarrage. Puis on revient sur l'angle initial, jusqu'à obtenir la coïncidence des deux points en altitude.

Cette méthode est appelée : méthode de tir à deux paramètres (ici longueur de la corde et inclinaison). Sur un tableur, on peut rendre automatique ce retour à la condition initiale. Mais on peut aussi faire manuellement cette opération.

Je peux fournir les feuilles de tableaux Excel qui permettent de trouver les valeurs numériques.

Exemple de tyrolienne

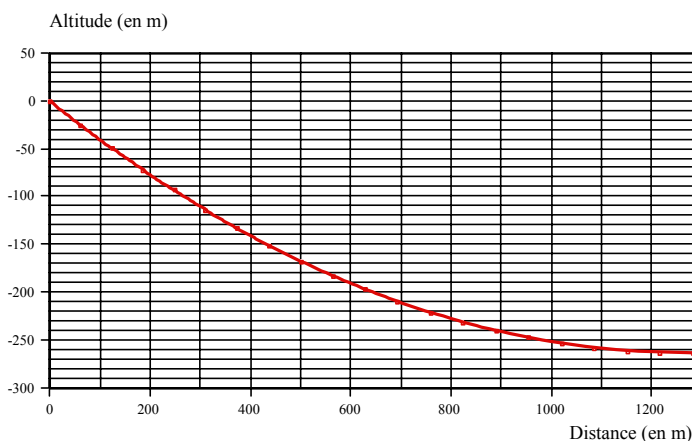


Fig. 5- Tyrolienne tendue mais sans spéléo (2% d'élasticité à 800 N)

Dans l'exemple choisi sur la figure, la longueur de la corde sans charge est 1244 m et la longueur en position est 1318 m. L'allongement de la corde est de 74 m. L'angle au niveau de l'amarrage supérieur est de $22,8^\circ$.

2-4- Tenue à la pluie

La corde ayant été tendue par temps sec à la tension nominale T_0 , on suppose qu'une pluie inopinée vient charger la corde en eau. On veut calculer la nouvelle forme de la corde et la nouvelle tension à l'amarrage haut. On se donne donc la longueur de la corde et l'on essaye un angle θ'_0 et une tension T'_0 pour obtenir le raccordement de la corde à l'amarrage inférieur (calcul précédent). Il est possible que la pluie modifie l'élasticité de la corde, ce qu'on devra prendre en compte. Il est possible aussi que le nylon mouillé change de longueur.

Pour l'application numérique, on va se donner par exemple une masse mouillée de 20 g/m, ce qui porte la charge totale à 100 g/m et d'élasticité inchangée. On voit que l'excédent de poids est faible et ne porte pas trop à conséquence. Le manque de données et la faiblesse de l'effet ne nous incitent pas à faire ce calcul.

2-5- Calcul de la tenue au vent

Un vent latéral va affecter la forme de la corde. Nous allons estimer la force d'un vent perpendiculaire par unité de longueur de corde qui s'applique sur la tyrolienne.

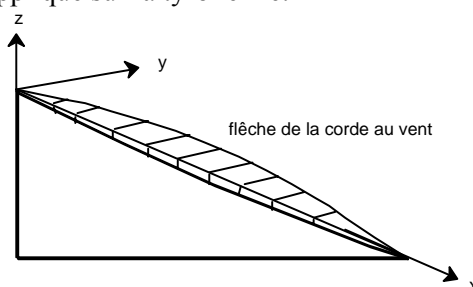


Fig. 6- La corde subit deux flèches, une de direction z et une autre de direction y (prendre garde à la nouvelle définition de x, différente du cas sans vent)

Force du vent. La force du vent (par unité de longueur de corde) s'écrit :

$$\frac{dF}{dL} = \frac{1}{2} \rho V^2 C_x d$$

Le coefficient de frottement C_x dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement autour de la corde, donc de la vitesse du vent et du diamètre de la corde d . Pour un vent dont la vitesse varie entre 0 et 100 km/h, le nombre de Reynolds varie de 0 à 18000, en effet :

$$\frac{V d}{\nu} = \frac{100}{3,6} \frac{0,01}{15 \cdot 10^{-6}} = \frac{10\,000}{0,54} = 18\,000$$

On trouve dans les ouvrages (Brun, Martinot-Lagarde par exemple) l'expression de C_x autour de cette valeur du nombre de Reynolds. Le coefficient de frottement reste constant sur une certaine plage du nombre de Reynolds et voisin de 1. On en déduit, pour un vent de 100 km/h, la force linéique :

$$\left(\frac{dF}{dL}\right)_{\text{vent}} = \frac{1}{2} 1,1 \left(\frac{100}{3,6}\right)^2 0,01 = 4,2 \text{ N/m}$$

Cette force est cinq fois plus grande que le poids de la corde (0,8 N/m). Un grand vent va donc induire une grande flèche sur la corde. La longueur sur laquelle le vent aura prise est la distance L entre les amarrages. On ne tiendra pas compte de l'allongement de la corde dû à son poids car on supposera que l'amincissement de la corde compense cet effet :

$$L = \sqrt{D^2 + H^2} = \sqrt{1280^2 + 264^2} = 1307 \text{ m}$$

La force totale pour un vent de 100 km/h sur une corde de 1 cm de diamètre vaudra donc :

$$F = 1307 * 4,2 = 5490 \text{ N}$$

La corde s'allonge à cause de la force du vent, mais nous n'avons pas à prendre en compte cet allongement pour le calcul de la force totale car la corde devient oblique par rapport au vent et l'allongement de la corde est compensé par la projection de la force dans la direction y . En d'autres termes, pour un tronçon dL , la nouvelle longueur est en $dL/\cos\alpha$ mais la projection perpendiculaire au vent est à multiplier par $\cos\alpha$. Les deux opérations se compensent exactement.

La corde va donc prendre une forme très courbée et subir une tension supplémentaire qu'on va calculer.

On sait que la courbe prise par la corde sera une parabole (c'est un résultat classique utilisé pour le calcul des



ponts suspendus). Mais on va calculer cette forme numériquement. À la force verticale due au poids de la corde ($m g b$), on rajoute une force horizontale :

$$T_y = \left(\frac{dF}{dL} \right)_{\text{vent}} b' \cos \alpha$$

Dans cette relation, b' est la longueur du tronçon en tenant compte de la charge du vent.

On se donne une corde (avant le vent) de longueur 1244 m, on la tend à l'amarrage le plus haut à 2500 N de tension. Avec le poids, elle prend une longueur de 1318 m correspondant à une distance entre appuis $L_1 = 1306,9$ m. Et on la soumet à un fort vent constant et de direction horizontale perpendiculaire à la direction Ox. La tension à l'amarrage augmente et l'angle α (entre la direction Ox et la tangente à la corde) aussi. On se donne un angle α_0 et on calcule de proche en proche la forme de la corde. La condition de tir porte sur l'amarrage du bas qui doit être à la distance 1306,9 m et avec un décalage nul en y.

On s'intéresse à l'excédent de tension provoqué par le vent et on note T cet excédent de tension. Cela revient à considérer la tension T de la corde pour une masse linéique de la corde nulle, cette tension provenant seulement de la tension initiale (sans vent) et de la surcharge due au vent.

Équations du calcul le long de la corde. Supposons connues les coordonnées de l'extrémité gauche du tronçon i , calculons celles de l'extrémité droite. La tension T_{i-1} est connue, de même que l'angle de dévers α_{i-1} . On écrit comme au-dessus les deux équations statiques au point M_i du funiculaire (sur x oblique et sur y).

$$T_{i-1} \cos \alpha_{i-1} = T_i \cos \alpha_i \quad (3)$$

$$T_{i-1} \sin \alpha_{i-1} + \left(\frac{dF}{dL} \right)_{\text{vent}} b' \cos \alpha_{i-1} = T_i \sin \alpha_i$$

On pose :

$$T_{\text{vent}} = \left(\frac{dF}{dL} \right)_{\text{vent}} b' \approx \left(\frac{dF}{dL} \right)_{\text{vent}} b$$

Il peut sembler peu précis d'assimiler la longueur exacte b' du tronçon à la longueur sans tension b , mais la mise en tension de la corde s'accompagne d'un amincissement du diamètre qui diminue la surface qu'oppose la corde au vent, et ceci compense à peu près cela. La deuxième équation se ramène donc à :

$$T_{i-1} \sin \alpha_{i-1} + T_{\text{vent}} \cos \alpha_{i-1} = T_i \sin \alpha_i \quad (4)$$

Ces deux équations (3 et 4) à deux inconnues nous fournissent α_i et T_i en fonction des valeurs précédentes. On calcule $\cos \alpha$ par la première relation et $\sin \alpha$ par la deuxième et l'on fait la somme des carrés (qui vaut 1) :

$$T_{i-1}^2 \cos^2 \alpha_{i-1} + [T_{i-1} \sin \alpha_{i-1} + T_{\text{vent}} \cos \alpha_{i-1}]^2 = T_i^2$$

Cette équation nous donne T_i .

$$T_i = \sqrt{T_{i-1}^2 + T_{i-1} T_{\text{vent}} \sin 2\alpha_{i-1} + (T_{\text{vent}} \cos \alpha_{i-1})^2}$$

Ayant calculé T_i , on déduit α en faisant le rapport de l'équation 2 sur l'équation 1 (membre à membre) :

$$\alpha_i = \text{Arctg} \left(\frac{T_{i-1} \sin \alpha_{i-1} + T_{\text{vent}} \cos \alpha_{i-1}}{T_{i-1} \cos \alpha_{i-1}} \right)$$

Coordonnées de l'extrémité droite du tronçon courant. On calcule ensuite les coordonnées de l'extrémité droite du tronçon de la tyrolienne par les relations :

$$x_i = x_{i-1} + b \left(1 + e \frac{T_{i-1} + T_i}{2 T_n} \right) \cos \left(\frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right)$$

$$z_i = z_{i-1} + b \left(1 + e \frac{T_{i-1} + T_i}{2 T_n} \right) \sin \left(\frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right)$$



Position de la corde, et angle que fait la tangente à la corde en chaque point. On peut maintenant examiner les effets simultanés de la pesanteur et d'un vent constant. Ayant calculé l'angle α tout au long de la corde et connaissant l'angle θ par rapport à une ligne horizontale, on en déduit l'angle θ' que fait la corde par rapport à la direction oblique des deux amarrages :

$$\theta' = \theta - \arctg\left(\frac{H}{D}\right)$$

Il est aisé de calculer maintenant l'angle β que fait la corde par rapport à la direction des deux amarrages (en appliquant la relation de Pythagore) :

$$\text{tg } \beta = \sqrt{\text{tg}^2 \theta' + \text{tg}^2 \alpha}$$

La position s'obtiendra de la même façon en appliquant le théorème de Pythagore sur les coordonnées y et z .

Application numérique : pour un vent de 100 km/h et un diamètre de 10 mm pour la corde, on trouve grâce à la feuille de calcul statique légèrement modifiée, une flèche due au vent de 207 m dans le sens du vent et la tension maximale de la corde est 5150 N, Elle se trouve appliquée aux deux amarrages. Cette tension représente une force importante. L'angle de dévers de la corde aux deux amarrages (dans le plan $Ox Oy$) est de 32° . Le déplacement total de la corde se décompose en deux déplacements : un déplacement vertical dû au poids de la corde (indépendant de la vitesse du vent) et un déplacement horizontal dû au vent (facilement plus grand que l'autre). La longueur totale de la corde passe à 1388 m

Remarque de sécurité : Il faudra donc après avoir installé la tyrolienne, mesurer en continue la vitesse du vent pour être certain, qu'à aucun moment, la corde de la tyrolienne n'a subi un dommage irréversible.

3- Calcul de la position statique d'un personnage sur une corde élastique

Calcul préliminaire. Pour cela, on installe la corde et on la tire jusqu'à obtenir une tension donnée (sans le personnage). Cette tension est la tension à vide à l'amarrage de gauche. On la note T_0 . Ce problème a été résolu au chapitre 2. Il nous a fourni la longueur totale de la tyrolienne et l'angle sans charge au niveau de l'appui haut.

Calculs en charge. On installe le personnage au milieu d'un tronçon donné et l'on calcule la nouvelle forme de la corde et la nouvelle tension.

3-1- Notations

On appelle m la masse linéique de la corde (par exemple 0,08 kg/m) sans charge. On appelle e l'élasticité de la corde (en N^{-1}) vérifiant la relation $dL/L = e T/T_n$ avec T la tension (en N) et L la longueur de la corde (en m). On pourra prendre $e = 0,02 = 2\%$ par exemple pour $T_n = 800$ N.

Comme précédemment, on découpe la corde en n tronçons de longueur $b = L/n$. Chaque tronçon est supposé rectiligne de longueur b'_i , b' étant la longueur après allongement de la corde due à l'élasticité de celle-ci.

$$b'_i = b \left(1 + e \frac{T_{i-1} + T_i}{2}\right)$$

Aux bornes de chaque segment i du funiculaire, les tensions sont notées T_{i-1} et T_i . Au milieu du tronçon i de la tyrolienne, la tension vaut $(T_{i-1} + T_i)/2$. Les angles d'inclinaison des tensions (polygone funiculaire) sont notés θ_{i-1} et θ_i .

On reprend le repère Oxz avec Ox horizontal et Oz sur la verticale ascendante.



3-2- Calcul numérique de la solution quasi statique

On part du point supérieur de l'amarrage de la corde. On place le personnage au milieu du tronçon numéro k (k est compris entre 1 et n). On se donne l'angle initial de la corde θ_0 . On calcule les coordonnées du point extrémité du premier tronçon. On en déduit la valeur de l'angle d'inclinaison θ_1 du segment suivant du funiculaire par l'équation de la statique.

Et on continue de proche en proche.

Équations pour le calcul de proche en proche le long de la corde. On rappelle pour mémoire le calcul dans les tronçons de la corde non chargés par le spéléo. Supposons connues les coordonnées de l'extrémité gauche du tronçon i de la tyrolienne, calculons celles de l'extrémité droite. La tension T_{i-1} est connue. On écrit les deux équations statiques du segment i du funiculaire.

$$T_{i-1} \cos \theta_{i-1} = T_i \cos \theta_i$$

$$T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + g m b = T_i \sin \theta_i$$

Ces deux équations à deux inconnues nous fournissent θ_i et T_i en fonction des valeurs précédentes. On calcule $\cos \theta$ par la première relation et $\sin \theta$ par la deuxième et l'on calcule la somme des carrés (qui vaut 1) :

$$T_{i-1}^2 \cos^2 \theta_{i-1} + [T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + g m b]^2 = T_i^2$$

Cette équation nous donne T_i .

$$T_i = \sqrt{T_{i-1}^2 + 2 T_{i-1} g m b \sin \theta_{i-1} + (g m b)^2}$$

Ayant calculé T_i , on déduit θ du rapport, membre à membre, de l'équation 2 par l'équation 1.

$$\theta_i = \text{Arctg} \left(\frac{T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + g m b}{T_{i-1} \cos \theta_{i-1}} \right)$$

Coordonnées de l'extrémité droite du tronçon. On calcule ensuite les coordonnées de l'extrémité droite du tronçon de la tyrolienne par les relations :

$$x_i = x_{i-1} + b \left(1 + e \frac{T_{i-1} + T_i}{2 T_n} \right) \cos \left(\frac{\theta_{i-1} + \theta_i}{2} \right)$$

$$z_i = z_{i-1} + b \left(1 + e \frac{T_{i-1} + T_i}{2 T_n} \right) \sin \left(\frac{\theta_{i-1} + \theta_i}{2} \right)$$

Point chargé par le spéléo. Quand on passe au point où se situe le personnage (tronçon k), les deux équations sont changées. La force qu'exerce le personnage sur la corde se décompose à l'instant t en deux composantes, l'une sur x et l'autre sur z. Dans le cas quasi-statique, la composante sur x est nulle ($F_x = 0$). Il ne reste plus que la composante sur z : $F_z = Mg$ (M étant la masse du personnage).

Les deux relations s'écrivent alors :

$$T_{i-1} \cos \theta_{i-1} + F_x = T_i \cos \theta_i$$

$$T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + g m b + F_z = T_i \sin \theta_i$$

On élimine d'abord l'angle θ :

$$T_i = \sqrt{(T_{i-1} \cos \theta_{i-1} + F_x)^2 + (T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + g m b + F_z)^2}$$

Et on en déduit l'angle θ_i :

$$\theta_i = \text{Arctg} \left(\frac{T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + m g b + F_z}{T_{i-1} \cos \theta_{i-1} + F_x} \right)$$

On voit que les relations de passage pour le funiculaire peuvent être mises sous une forme unique, que le point soit chargé ou non, à condition de prendre pour la force F une valeur positive ou nulle suivant que le point est chargé ou non. Cette observation simplifiera la mise sous tableur.

3-3- Fin du calcul et itération pour assurer les conditions aux limites

Quand on arrive au dernier point de la tyrolienne de coordonnées x_n et z_n , ce point doit être le point bas de l'amarrage et la portée doit être égale à D . Comme dans le calcul sans spéléo, ces deux conditions sont en rapport avec le choix arbitraire de la tension à l'amarrage de gauche et de l'inclinaison. On revient au début du calcul et l'on modifie la valeur de la tension initiale pour assurer la portée D . Puis on revient sur l'angle initial, jusqu'à obtenir la coïncidence des deux points. Cette double itération, sur la tension et sur l'angle, sera faite à la main sur le tableur. Il est très facile de la rendre automatique.

Cette méthode est une méthode de tir à deux paramètres. Nous avons arrêté les itérations quand les longueurs D et H étaient celles visées, à moins de 10 cm près.

Exemple de tyrolienne chargée par un spéléo de 80 kg

Dans cet exemple, on a retenu les caractéristiques de l'introduction et l'on a divisé la corde au repos en 20 tronçons ($n = 20$). On a calculé la position du spéléo et la forme de la corde pour un spéléo placé au milieu de chacun de ces 20 tronçons. Le spéléo est supposé être immobile sur la corde. La force F_x est nulle. Seule existe une force F_z qui est le poids du spéléo.

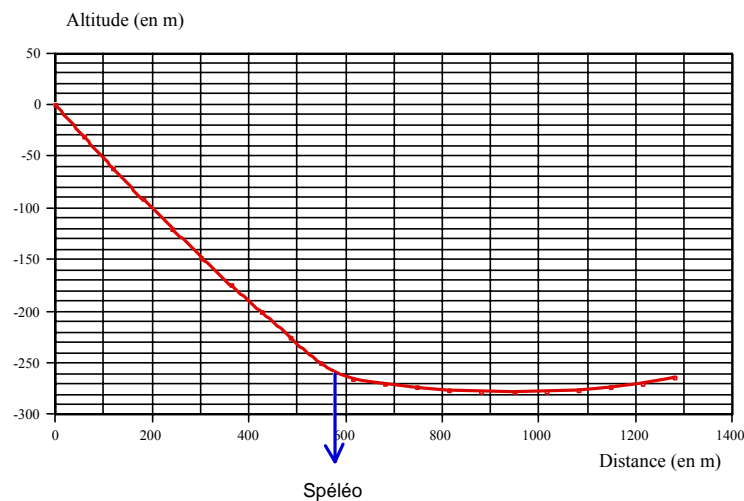


Fig. 7- Exemple de tyrolienne chargée à peu près au milieu

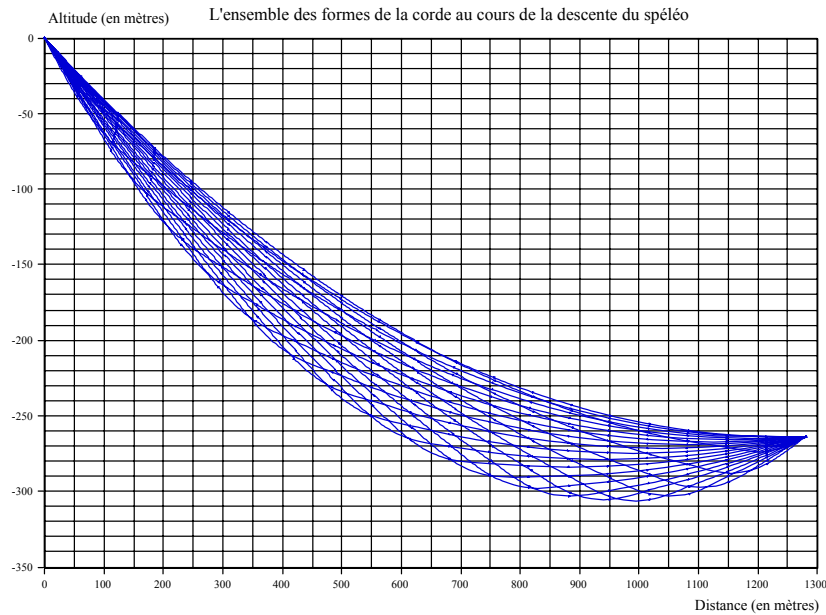
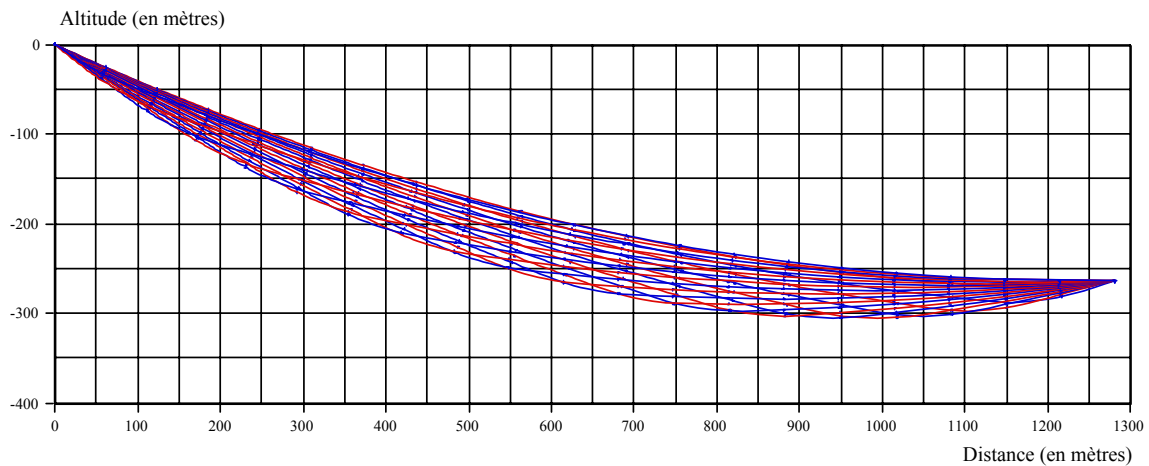


Fig. 8- Ensemble des formes prises par la corde au cours de la descente du spéléo
 Cette famille de courbes dépend, bien évidemment, des paramètres retenus

Chaque courbe représente la forme de la corde pour une position donnée du spéléo. Les deux courbes enveloppes, en bas et en haut, qui limitent l'ensemble des formes prises par la corde au cours de la descente du spéléo représentent l'espace balayé par la corde. Il faut donc que cet espace soit libre.

Sur la figure ci-dessous, on a essayé de prendre les mêmes échelles : verticale et horizontale.



L'ensemble des formes de la corde au cours de la descente du spéléo

Fig. 9- On a essayé de prendre les mêmes échelles : verticale et horizontale

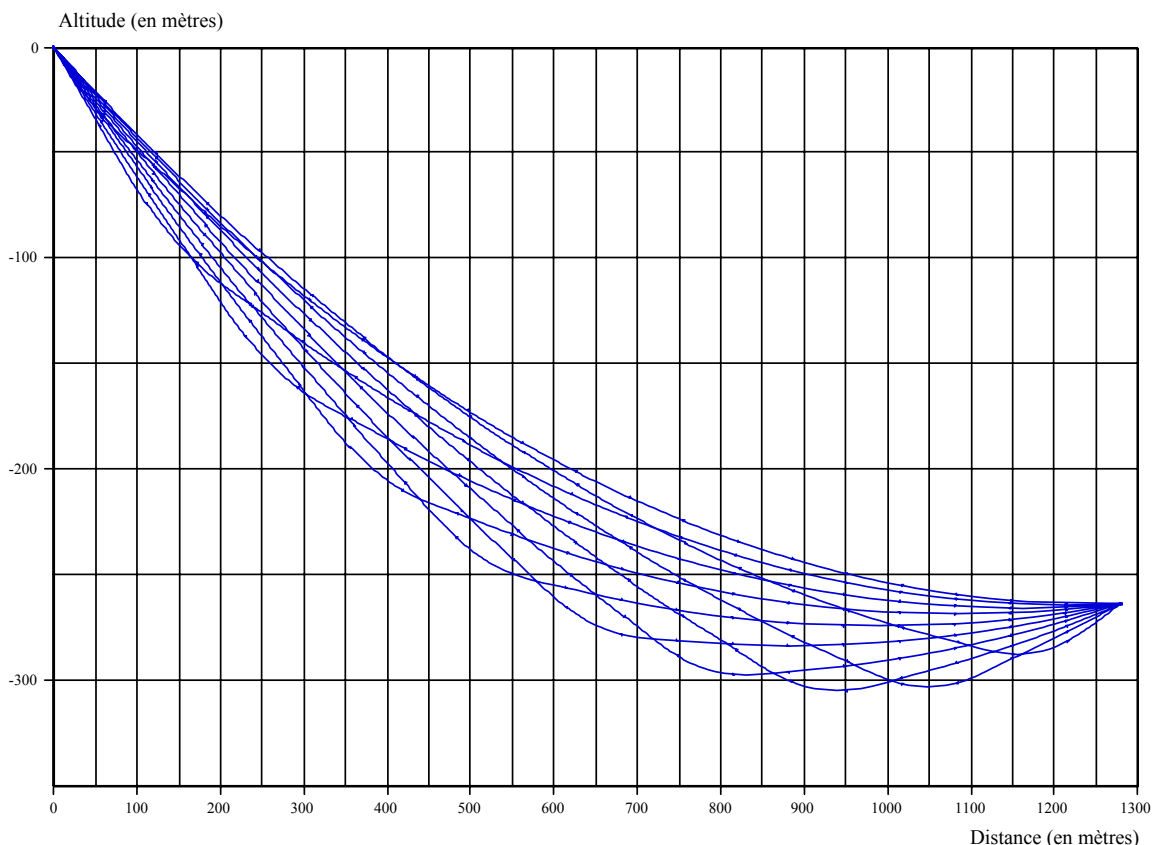


Fig. 10- On a représenté une position sur 2 pour permettre de mieux voir la forme de la corde

Angles près des amarrages

Quand le spéléo se trouve près de l'amarrage de gauche, l'angle que fait la corde avec l'horizontale est voisin de 30° . Quand le spéléo se trouve près de l'amarrage de droite, l'angle devient voisin de 23° . Ce sont des angles importants qui nécessitent des pentes fortes au voisinage des amarrages.

Tension sur la corde

La corde ayant été tendue préalablement à 2500 N, le spéléo augmente cette tension quand il se met sur la corde. En examinant l'ensemble des positions de la corde, on trouve que la tension maximale sera obtenue quand le personnage passera en un point à 40 % de la distance D et la tension maximale vaudra 3245 N. Cette tension maximale se trouve à l'amarrage haut de la tyrolienne. Cette tension est largement inférieure à la tension limite du cahier des charges (4500 N).

4- Résolution simplifiée du problème dynamique

Cette quatrième partie est traitée d'une manière progressive et approchée. Dans un premier temps, nous calculons à partir de la position statique du spéléo sur la corde la loi horaire de descente, puis nous en déduisons les forces normales induites sur la corde (les forces tangentielles ne servent qu'à l'accélération du spéléo). Le mouvement du spéléo se déduit des forces qui agissent sur lui (freinage dû à l'air, force de pesanteur projetée tangentiellement à la corde). Dans un deuxième temps, nous nous posons des questions (sans pouvoir les résoudre correctement) sur le rôle de la dissipation d'énergie dans la corde du fait du pliage imposé par le passage du spéléo. Enfin, nous examinerons comment faire jouer les forces d'inertie de la corde elle-même.



4-1- Première approche dynamique

Dans un premier temps, nous négligeons les forces d'inertie de la corde en mouvement et les facteurs de dissipation d'énergie, dus à la déformation de celle-ci et aux frottements divers.

Équation de la dynamique pour le spéléo. On dispose d'une équation supplémentaire : l'équation de la dynamique appliquée au personnage. Elle s'écrit :

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = -M g \vec{k} - \frac{1}{2} \rho C_x S V \vec{V} + \vec{F}$$

Dans cette relation V est le vecteur vitesse du spéléo, M sa masse, ρ est la masse volumique de l'air, C_x est le coefficient de traînée du spéléo, S est le maître-couple du spéléo (m^2) et F la force exercée par la corde sur le spéléo (opposée de celle exercée par le spéléo sur la corde). Cette force est perpendiculaire à la corde (on néglige donc le frottement au niveau de la poulie supposée sans frottement). Le maître couple est une surface transversale qu'offre le spéléo au vent relatif engendré par son mouvement. On suppose par ailleurs que la corde n'est pas le siège d'ondes qui en déformeraient la forme.

Détermination du C_x . Pour calculer le C_x , on adopte une vitesse limite de 160 km/h (44 m/s) pour un homme tombant en chute libre à plat (parachutiste). Cela fournit le paramètre $S C_x$ de l'homme :

$$\frac{1}{2} \rho u^2 C_x S = M g \quad \Rightarrow \quad C_x S = \frac{2 M g}{\rho u^2} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 10}{1,1 \cdot 44^2} = 0,75 \text{ m}^2$$

Si on fait varier la masse du spéléo, on admettra que le $C_x S$ varie comme la masse à la puissance 2/3.

Les mesures faites à l'occasion des descentes sur la tyrolienne du Pas des Rages montrent que les spéléos adoptent une position plutôt ramassée qui conduit à une valeur numérique de $C_x S$ plus petite, de l'ordre de $0,45 \text{ m}^2$. Les vitesses qui en résultent sont en général plus grandes que celles que nous avons calculées plus bas.

Le poids du spéléo se décompose en deux parties : l'une tangente à la corde sert à accélérer le spéléo, l'autre perpendiculaire à la corde est la seule qui intervient dans la forme de la corde.

Point chargé par le spéléo. Quand le spéléo passe au milieu d'un tronçon (tronçon k), la force qu'exerce le personnage sur la corde se décompose en deux composantes, l'une sur x et l'autre sur z . Dans le cas quasi-statique, la composante sur x était nulle. Il ne restait plus que la composante sur z qui valait Mg (M étant la masse du personnage). Dans le cas dynamique, la composante parallèle à la corde est nulle (condition équivalente à un roulement sans glissement). Ne reste que la composante normale à la corde. On appelle \vec{u} un vecteur unitaire porté par le tronçon de corde k et \vec{v} un vecteur unitaire perpendiculaire (sens direct). Cette composante normale s'obtient par l'équation de la dynamique :

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{u} = -M g \sin \theta - \frac{1}{2} \rho C_x S V \vec{V} \cdot \vec{u}$$

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{v} = -M g \cos \theta - \frac{1}{2} \rho C_x S V \vec{V} \cdot \vec{v} + F$$

Cette dernière relation peut se mettre sous la forme :

$$F = M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{v} + M g \cos \theta + \frac{1}{2} \rho C_x S V \vec{V} \cdot \vec{v}$$

Cette force F (portée par le vecteur unitaire \vec{v} perpendiculaire à la corde) se décompose ensuite en deux parties, l'une sur x et l'autre sur z . Ces deux composantes valent donc :



$$F_x = M g \cos \theta \sin \theta + M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{v} \sin \theta + \frac{1}{2} \rho C_x S V \vec{V} \cdot \vec{v} \sin \theta$$

$$F_z = M g \cos^2 \theta + M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{v} \cos \theta + \frac{1}{2} \rho C_x S V \vec{V} \cdot \vec{v} \cos \theta$$

La vitesse du spéléo a une direction voisine de celle de la tangente à la corde (pas tout à fait quand même). On peut donc admettre que les troisièmes termes des membres de droite sont assez petits devant le poids du spéléo. Les forces d'inertie sont principalement la force centrifuge que transmet le spéléo à la corde. Si on la suppose petite (cf. la discussion plus loin), on peut admettre en première approximation les relations suivantes :

$$F_x = M g \cos \theta \sin \theta$$

$$F_z = M g \cos^2 \theta$$

On a choisi comme valeur de θ , celle à gauche du segment du funiculaire pour éviter de compliquer l'expression, au prix d'une légère imprécision il est vrai. Les deux relations de la dynamique sur le segment de corde chargé par le spéléo s'écrivent alors :

$$T_{i-1} \cos \theta_{i-1} + M g \cos \theta_{i-1} \sin \theta_{i-1} = T_i \cos \theta_i$$

$$T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + g m b + M g \cos^2 \theta_{i-1} = T_i \sin \theta_i$$

On élimine d'abord l'angle θ_i :

$$T_i = \sqrt{\cos^2 \theta_{i-1} (T_{i-1} + M g \sin \theta_{i-1})^2 + (T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + g m b + M g \cos^2 \theta_{i-1})^2}$$

Et on en déduit l'angle θ_i :

$$\theta_i = \text{Arctg} \left(\frac{T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + g m b + M g \cos^2 \theta_{i-1}}{\cos \theta_{i-1} (T_{i-1} + M g \sin \theta_{i-1})} \right)$$

On pourrait améliorer légèrement le calcul en appliquant une itération qui consiste à utiliser le premier résultat pour en déduire un meilleur.

On refait le calcul numérique pour différentes positions du spéléo passant aux 20 points retenus, et l'on obtient une nouvelle famille de formes de la corde pour ces différents points de charge.

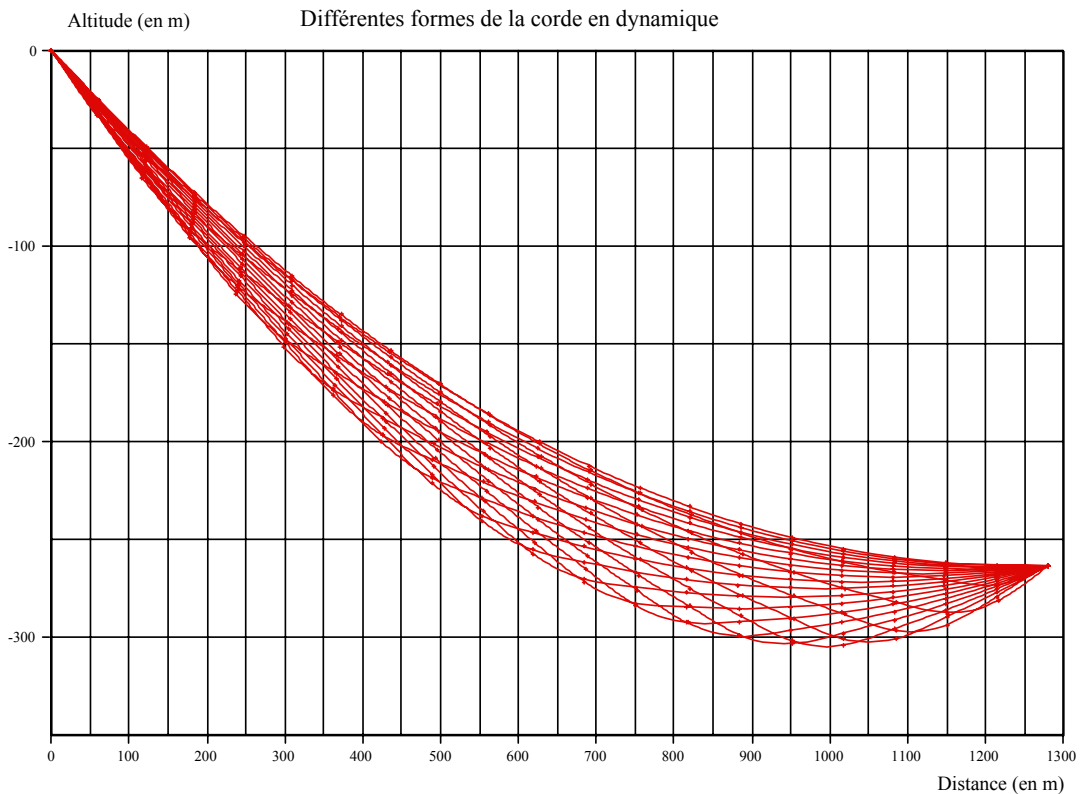


Fig. 11- Les différentes formes prises par la corde en fonctionnement dynamique

Si on compare les différentes formes prises par la corde en fonctionnement statique et en fonctionnement dynamique, on constate que la corde se creuse plus en fonctionnement statique qu'en fonctionnement dynamique. À la distance de 400 m, l'écart est de 18 m. À la distance de 800 m, l'écart se réduit à 10 m environ.

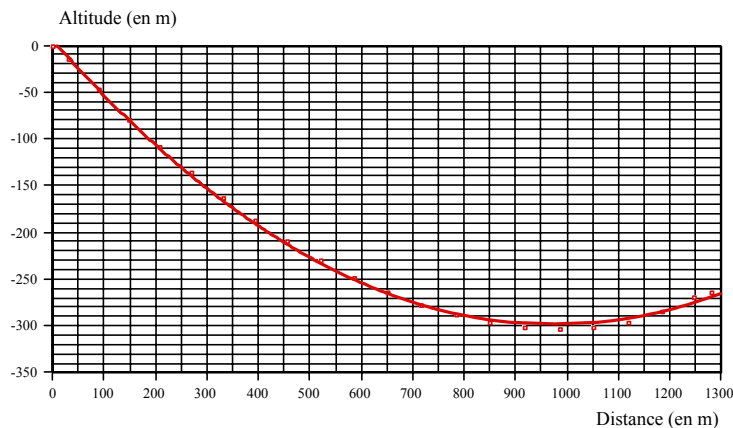


Fig. 12- Les différents points calculés de la trajectoire du spéléo et approximation parabolique

La figure ci-dessus présente une approximation parabolique de la trajectoire du spéléo avec les points calculés séparément. On voit que l'approximation est convenable.

Trajectoire du spéléo

On va approximer la trajectoire du spéléo à partir du graphique obtenu au-dessus. Une assez bonne approximation est la fonction :

$$z = 300 \left[\left(\frac{x}{980} - 1 \right)^2 - 1 \right]$$



D'où la tangente à la courbe en fonction de x :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dz}{dx} = 0,612 \left(\frac{x}{980} - 1 \right)$$

À partir de cette relation, on peut trouver l'expression du mouvement du spéléo au cours du temps en projetant l'équation de la dynamique sur la tangente à la corde (la force \mathbf{F} n'a pas de composante dans cette direction \mathbf{u}).

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{u} = -M g \sin \theta - \frac{1}{2} \rho C_x S V \vec{V} \cdot \vec{u}$$

Si on néglige les forces centrifuges le premier produit scalaire se simplifie. De même si on admet que la vitesse du spéléo est un vecteur presque parallèle à la corde, alors le dernier terme se simplifie aussi :

$$M \frac{dV}{dt} = -M g \sin \theta - \frac{1}{2} \rho C_x S V |V|$$

On obtient l'expression finalement de calcul de la vitesse de proche en proche. On part du repos et on calcule numériquement à chaque instant le mouvement et la position du spéléo. Si on connaît la vitesse à l'instant t , on en déduit la vitesse à l'instant $t + \Delta t$:

$$V' = V - \Delta t \left(g \sin \theta + \frac{1}{2} \frac{\rho C_x S}{M} V |V| \right)$$

On peut projeter sur x et obtenir une équation en u (composante sur x de la vitesse du spéléo V).

$$\frac{du}{dt} = -g \cos \theta \sin \theta - \frac{\rho C_x S}{2 M} \frac{1}{\cos \theta} u |u|$$

$$u' = u - \Delta t \left(g \cos \theta \sin \theta + \frac{\rho C_x S}{2 M} \frac{1}{\cos \theta} u |u| \right)$$

De même pour la position :

$$x' = x + u \Delta t$$

Exemple numérique approché :

Nous avons tracé ci-dessous la distance parcourue au cours du temps pour les valeurs retenues dans l'introduction. On voit que le spéléo accélère très vite au début, puis sa course se ralentit et il atteint une valeur maximale de x . Il devrait alors mettre le bloqueur sur la corde pour éviter de repartir en arrière. S'il ne le fait pas, il exécute une oscillation lente sur la corde.

Chambat (communication personnelle) en appliquant une autre méthode a trouvé une vitesse maximale plus petite (25 m/s). Cet écart montre bien la précision modeste de ce calcul-ci qui décompose la corde en seulement 20 tronçons de 70 m chacun et montre aussi que le choix de prendre l'angle sur l'extrémité gauche du tronçon (et non au milieu) amène une imprécision (liée au la faible valeur de n).

Le fait de ne pas avoir tenu compte du frottement interne sur la corde nous fait surestimer la longueur atteinte. On peut penser que les oscillations se ramèneront à un seul retour à la position d'équilibre (point bas sur la corde).

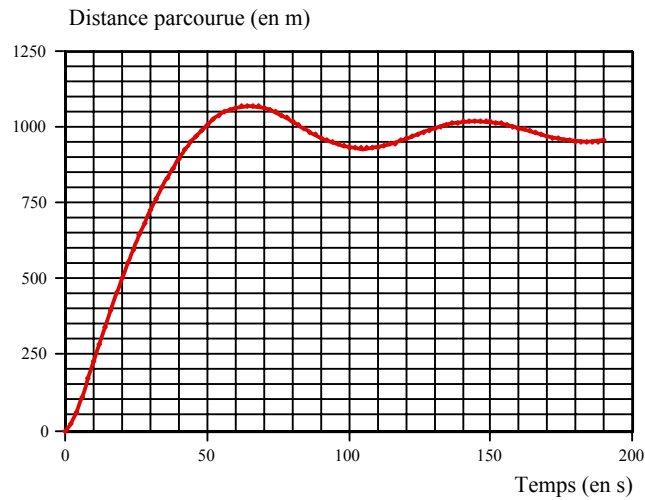


Fig. 13- Distance parcourue par le spéléo en fonction du temps

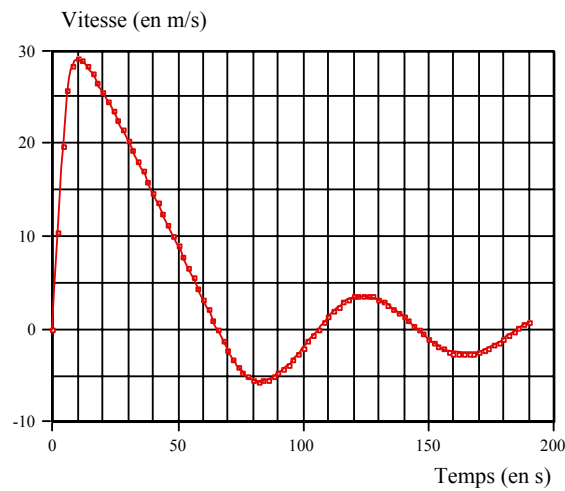


Fig. 14- Vitesse du spéléo en fonction du temps

On voit sur le graphique que la vitesse du spéléo ne dépasse pas les 100 km/h. Ce qui était demandé. La phase d'accélération dure moins de 10 s. On imagine bien qu'un phénomène d'accélération qui a lieu sur seulement 3 points calculés ne peut pas être très précis. Il faudrait augmenter le nombre $n = 20$ de tronçons de tyrolienne (nous ne le ferons qu'avec la version finale des données).

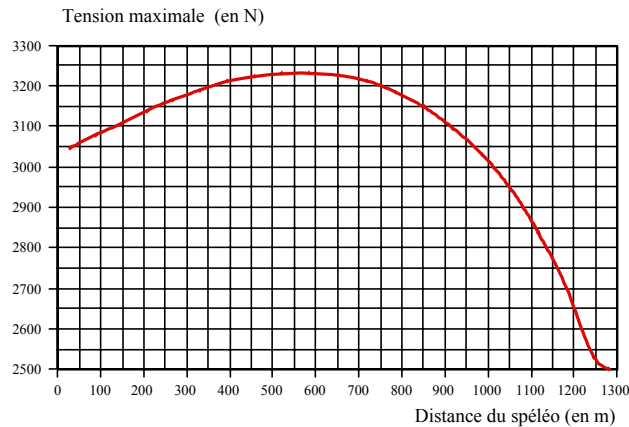


Fig. 15- Tension maximale à l'amarrage du haut en fonction de la position du spéléo sur la corde

Force centrifuge. On calcule maintenant la force centrifuge maximale exercée par le spéléo sur la corde. On a en effet négligé cette force et il faut vérifier que cette approximation est valable.

Pour cela, on calcule le rayon de courbure sur la trajectoire (et on retient le plus petit) :

$$R_c = \frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{z''} = \frac{\left(1 + 0,612^2 \left(\frac{x}{980} - 1\right)^2\right)^{3/2}}{0,624 \cdot 10^{-3}} \approx 1600 \text{ m}$$

La force centrifuge maximale est nettement plus petite que :

$$F = M \frac{u^2}{R_c} = \frac{80 \cdot 900}{1600} = 45 \text{ N}$$

On voit que cette force est petite, plus petite que 5% du poids du spéléo. Elle ne nécessite pas de refaire le calcul de la trajectoire du spéléo.

4-2- Aspects thermiques

Dans les calculs précédents, on n'a pas tenu compte de la dissipation d'énergie due aux différents frottements. Nous allons ici essayer d'estimer leur contribution.

4-2-1- Dissipation dans la poulie

La poulie est une poulie montée sur roulements à billes. Ce dispositif empêche les frottements : solide sur solide. Il ne reste plus que la dissipation visqueuse dans la graisse qui sépare les roulements des pièces métalliques. Cette dissipation est faible.

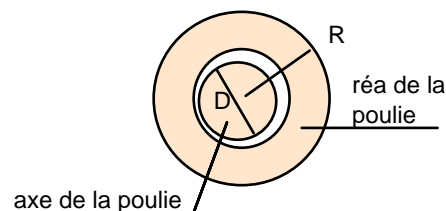


Fig. 16- Schéma de la poulie et de son axe.
Le frottement se fait entre l'axe (diamètre D) et le réa (rayon R)

Poulie sans roulement. Pour trouver une borne supérieure aux frottements, nous allons estimer l'échauffement d'un palier (sans billes donc). De ce fait, nous surestimons grandement l'influence de ce frottement car l'espace requis pour engendrer les forces de pression nécessaires pour contenir les forces radiales dans un palier est très petit. Ce qui contribue à une dissipation plus forte car dans un roulement à bille, les espaces ne sont pas aussi petits. Mais ce calcul nous donnera l'ordre de grandeur d'un majorant. Nous appelons ω la vitesse de rotation de la pièce mobile (en rd/s). Pour un réa de $R = 2,5 \text{ cm}$ de rayon, elle s'écrit :

$$\omega = \frac{V}{R}$$

Par exemple pour une vitesse $V = 100 \text{ km/h} = 28 \text{ m/s}$ et un rayon du réa $R = 0,025 \text{ m}$, cela donne une vitesse de rotation $\omega = 1110 \text{ rd/s}$ soit 10600 t/mn .

La théorie des paliers nous permet d'estimer l'épaisseur minimale de la graisse, là où la dissipation visqueuse sera la plus importante. Le coefficient de frottement d'un palier (le rapport entre la charge sur l'arbre et la composante tangentielle moyenne des frottements). À petite vitesse, l'espace entre les cylindres est très variable tout autour. C'est cet espace variable qui engendre des forces de pression variables qui permettent de



soutenir la charge F . À grande vitesse l'espace entre les cylindres tend à devenir uniforme (on nomme Δr ce jeu moyen).

On ne peut calculer facilement le coefficient de frottement qu'à très grande vitesse, quand le jeu entre les deux cylindres devient uniforme. Quand ce n'est pas le cas, le calcul est plus délicat. À basse vitesse, il y a contact partiel entre les deux surfaces solides, c'est le régime dit onctueux. Le coefficient de frottement diminue avec la vitesse. Il passe par un minimum et augmente ensuite. Le fonctionnement est alors appelé régime fluide. Le minimum de f entre les deux régimes se produit pour une vitesse de rotation fournie par la relation (Brun-Martinot-Lagarde, tome 2 p 194) :

$$\omega_{\text{crit}} = \frac{0,6 \cdot 10^{-4}}{\mu D} \left(\frac{F D}{c^2} \right)^{1/4} = \frac{0,6 \cdot 10^{-4}}{10^{-2} \cdot 10^{-2}} \left(\frac{800 \cdot 10^{-2}}{10^{-4}} \right)^{1/4} = 6 \cdot 8^{1/4} = 10 \text{ rd/s}$$

Dans cette relation F est le poids du spéléo, D le diamètre de l'axe de la poulie (à ne pas confondre avec le diamètre du réa), c est la largeur de contact utile, μ est la viscosité dynamique de l'huile. On a vu plus haut, qu'on se trouve nettement au-dessus de ce régime onctueux. On est donc situé en général dans le régime fluide.

Le nombre qui intervient dans la théorie de Sommerfeld est le nombre sans dimension (dit de Sommerfeld) qui s'exprime par la relation :

$$S = \frac{1}{8 \pi} \frac{\mu \omega c D^3}{F^2 r} \approx \frac{1}{8 \pi} \frac{10^{-2} \cdot 1110 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}}{800 \cdot 10^{-4}} = \frac{1,11 \cdot 10^{-7}}{0,64 \pi} = 5,5 \cdot 10^{-8}$$

Dans cette relation, Δr est le jeu entre l'arbre (l'axe) et la poulie. On trouve que pour un nombre de Sommerfeld supérieur à 0,05 la distance entre les cylindres est à peu près uniforme. Ce n'est pas du tout le cas ici. Le calcul est alors plus complexe et aucune théorie simple ne correspond à ce cas. On trouve (opus cité page 197) une expression empirique souvent utilisée pour le coefficient de frottement :

$$f = 1,52 \frac{r}{D} \approx 1,52 \frac{10^{-4}}{10^{-2}} = 0,015$$

Si nous adoptons cette dernière valeur, alors la puissance maximale dissipée s'exprime par la relation :

$$P = f F \frac{\omega D}{2} = 0,015 \cdot 800 \cdot \frac{1110 \cdot 10^{-2}}{2} = 67 \text{ W}$$

Pour mémoire, un spéléo qui descend au descendeur à la vitesse verticale constante de 0,5 m/s dissipe une puissance de :

$$P' = M g \frac{dz}{dt} = 80 \cdot 10 \cdot 0,5 = 400 \text{ W}$$

On voit donc que l'échauffement des poulies sera nettement plus faible que celui d'un descendeur.

Cette puissance est proportionnelle à la vitesse. La force tangentielle équivalente F' qui l'engendre au niveau de la corde est donc constante et s'écrit (en prenant $\varphi = 0$):

$$P = F' V = f' F \omega \frac{D}{2} = f' F \frac{V D}{R 2} \Rightarrow \boxed{F_D = \frac{1}{2} f' M g \cos \varphi \frac{D}{R}}$$

$$F_D = \frac{1}{2} f' M g \cos \varphi \frac{D}{R} = \frac{1}{2} \cdot 0,015 \cdot 800 \cdot \frac{10^{-2}}{0,025} = 2,4 \text{ N}$$

Tout se passe comme si une force de freinage supplémentaire $F_D = 2,4 \text{ N}$ s'appliquait au spéléo.

Contrairement au cas du descendeur où la production de chaleur se fait au contact de la corde, dans le cas

d'une poulie mobile à palier, la production de chaleur se fait au niveau du palier et non à la surface de la poulie. La température atteinte par le palier dépend de la durée de la descente et du refroidissement à cause du vent. Il faudrait un schéma géométrique précis pour calculer cet effet.

Une poulie à roulement développera une puissance thermique bien plus faible que le palier que l'on vient de calculer. Il n'y a donc pas de soucis à se faire vis-à-vis de ce problème.

Il reste bien entendu à calculer l'évolution de la température dans la poulie et à vérifier qu'il ne risque pas de produire un blocage intempestif de celle-ci. Si ce blocage se produisait, la corde glisserait directement sur la poulie et le spéléo serait freiné par cette force de frottement supplémentaire. La dissipation produite par ce frottement augmenterait la température au contact du frottement. On retombe sur le problème du descendeur spéléo. On en déduit que la corde serait légèrement fondue sur une couche superficielle sur une grande longueur, ce qui ne changerait pas la sécurité de l'ensemble. Le seul problème serait au moment de l'arrêt du spéléo qui se produirait prématurément, sans doute même pas au point bas de la tyrolienne. Il lui serait conseillé de refroidir les poulies par une petite aspersion d'eau. Cela éviterait une brûlure plus profonde de la corde. Même dans ce cas extrême, le spéléo ne serait pas en perdition. Mais il lui faudrait faire un long trajet pour rejoindre l'amarrage inférieur.

Dans la suite de l'étude, nous supposons que les poulies ne sont pas optimisées comme les systèmes industriels et nous adopterons, même pour une poulie à roulement, la force de freinage $F_D = 2,4 \text{ N}$ trouvée pour des paliers industriels.

4-2-2- Dissipation au niveau de la corde elle-même

Au niveau de la poulie double (deux réas placés en série), la corde subit deux changements de direction.

Plaçons-nous au point bas pour lequel l'angle θ est nul (b est ici la longueur d'un tronçon) :

$$\theta_i = \text{Arctg} \left(\frac{m b + M}{T_{i-1}} g \right) \approx \text{Arctg} \left(\frac{M g}{T_{i-1}} \right) = \text{Arctg} \left(\frac{80 \cdot 10}{3050} \right) = 15^\circ$$

Cette rotation de 15° ($= 0,26 \text{ rd}$) sur une longueur de l'ordre de 5 ou 6 cm engendre des glissements fibre sur fibre de la corde qui provoquent un frottement (qui dissipe l'énergie).

Près de l'amarrage du haut, le changement de direction est plus faible. À l'amarrage (31°), il vaut

$$\theta_1 = \text{Arctg} \left(\frac{T_0 \sin \theta_0 + M g \cos^2 \theta_0}{\cos \theta_0 (T_0 + M g \sin \theta_0)} \right) = \text{Arctg} \left(\frac{3000 \sin 31^\circ + 800 \cos^2 31^\circ}{\cos 31^\circ (3000 + 800 \sin 31^\circ)} \right) = 36^\circ$$

La déviation est donc de 5° à l'amarrage haut.

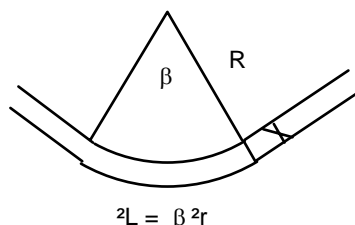


Fig. 17- La corde subit une déviation β au passage de la poulie

Modèle théorique simpliste de la dissipation. En l'absence de données plus précises, contentons-nous d'un modèle simpliste de dissipation. Nous supposons la corde constituée de fibres parallèles (ou plutôt de bandes fines disposées les unes sur les autres). Nous allons d'abord montrer que le frottement n'empêche pas le glissement des fibres les unes sur les autres. Puis nous calculerons la puissance dissipée par ce glissement.

Nous supposons la corde tronçonnée en p lanières plates de largeurs différentes mais d'épaisseurs identiques. Le plan qui contient les centres de la corde est perpendiculaire aux plans tangents aux différentes lanières (les plans des lanières correspondent au plan Oxy du repère de Frenet).

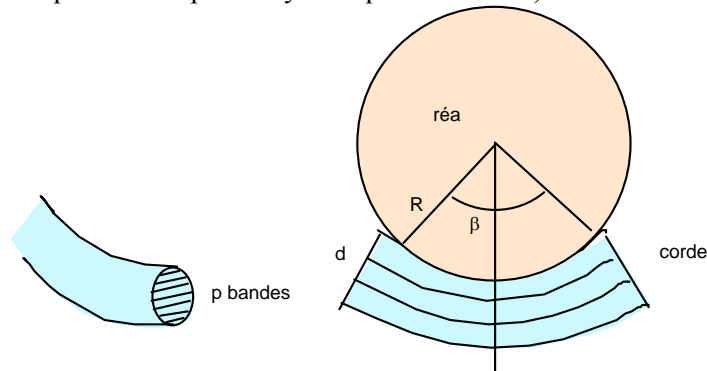


Fig. 18- Découpage de la corde en p lanières.

La courbure de la corde engendrerait (en l'absence de glissement) un allongement des fibres externes par rapport aux fibres internes. Cet allongement vaut βd (d est le diamètre de la corde, β est exprimé en radian). La différence relative de tension entre les fibres à l'intrados et les fibres à l'extrados serait (en l'absence de glissement) :

$$\frac{\Delta T}{T_n} = \frac{1}{e} \frac{\Delta L}{L} = \frac{\beta d}{e \beta R} = \frac{d}{e R} \approx \frac{0,01}{0,02 \cdot 0,05} = 10$$

Pour une tension moyenne dans la corde de 3000 N, cela occasionnera de grandes variations, par exemple de $T_{\min} = 500 \text{ N}$ à $T_{\max} = 5000 \text{ N}$

Glissement. Cette différence transversale énorme de tension (potentielle) va engendrer des glissements fibre sur fibre. Ces glissements vont atténuer la différence des tensions entre intrados et extrados et la ramener à des valeurs bien inférieures à la tension elle-même. Ce phénomène de diminution de l'écart de tension s'explique par le fait que ce glissement permet de répartir la différence de longueur sur une bien plus grande valeur.

L'écart maximal de tension permis par le coefficient de frottement se calcule en disant que le poids du spéléo, projeté perpendiculairement à la corde, permet une variation transversale de tension qu'on calcule grâce au frottement nylon sur nylon dont on va noter f le coefficient de frottement.

$$\Delta T = f M g \cos \theta \quad (= 0,2 \cdot 80 \cdot 10 \cdot 0,81 = 130 \text{ N près du point haut })$$

Si on considère les p lanières, le résultat est le même, car une lanière subit une force normale de l'ordre de Mg / p et la force tangentielle qui en résulte se ramène fMg / p . Quand on fait la somme de ces p forces tangentielles, on arrive au même écart total transversal possible.

Cet écart transversal permis de tension est négligeable devant le ΔT précédent. En d'autres termes, on peut dire que les forces tangentielles existantes au sein de la corde ne permettent pas de s'opposer au glissement des fibres les unes sur les autres. Le glissement aura donc pour valeur à peu près la différence des longueurs ΔL .

Puissance dissipée par le frottement. Nous proposons ici un calcul simplifié basé sur une corde de forme carrée. En annexe, nous reportons un calcul plus complet pour une corde circulaire. Ce dernier calcul donnera le même résultat que celui-ci.

On calcule la puissance en décomposant la corde en lanières d'épaisseur dy et de largeur constante s . La surface transversale totale restera la même si :



$$s = \frac{\pi}{4} d = 0,785 d$$

On verra plus loin que cette longueur ne joue aucun rôle.

La vitesse relative (par rapport à l'intrados de la corde) s'écrit :

$$V_r = \frac{\beta y}{t} = \frac{\beta y}{\beta R / V} = \frac{V y}{R}$$

D'où l'expression de la force de frottement en fonction de y :

$$F_T = f M g \cos \theta \frac{d-y}{d}$$

On vérifie que pour $y = 0$, on retrouve la totalité de la force tangentielle.

La puissance élémentaire de dissipation vaut donc :

$$dP = F_T \frac{dV_r}{dy} dy = f M g \cos \theta \frac{d-y}{d} \frac{dV_r}{dy} dy = f M g \cos \theta \frac{V}{R} \frac{d-y}{d} dy$$

On calcule la puissance de dissipation totale par l'intégrale :

$$P = \int_0^d dP = \int_0^d f M g \cos \theta \frac{V}{R} \frac{d-y}{d} dy = f M g \cos \theta \frac{V}{R} \int_0^d \left(1 - \frac{y}{d}\right) dy = f M g \cos \theta \frac{V}{R} \left[y - \frac{y^2}{2d} \right]_0^d$$

D'où l'expression de la puissance dissipée :

$$P = \frac{1}{2} f M g \cos \theta V \frac{d}{R}$$

On calcule la valeur numérique à la vitesse maximale de 100 km/h :

$$P_{\text{dissipée}} \approx \frac{0,2 \cdot 80 \cdot 10 \cdot 0,87 \cdot 0,008 \cdot 28}{2 \cdot 0,05} = 310 \text{ W}$$

Le diamètre de la corde diminue (à cause de l'écrasement) c'est pour cela que nous avons adopté 8 mm pour l'épaisseur de la corde. L'angle de déviation de la corde a disparu de l'expression de la puissance. On voit qu'il est facile de diminuer cette dissipation en augmentant le rayon R du réa de la poulie.

Cette puissance correspond à une vitesse de 100 km/h. On pourrait la mesurer à 250 m de l'amarrage supérieur (distance au bout de laquelle la vitesse en question est atteinte) si les cordes étaient constituées de torons disposés parallèlement et non tressés. Le tressage semble limiter le glissement en créant des forces de tension non parallèles à la corde. Mais ces forces seront de toute manière assez faibles par rapport aux tensions engendrées par l'allongement de la corde à l'extrados. On peut donc penser qu'elles ne changeront pas beaucoup le résultat.

Si on installe deux poulies en série, l'angle de déviation sera moitié pour chaque poulie. La force normale à la corde sera aussi moitié (la moitié du poids $\times \cos \theta$). La puissance dissipée sera donc la moitié et en comptant les deux poulies, on obtiendra la même puissance totale et donc la même force de freinage.

Cette puissance dissipée est à peu près proportionnelle à la vitesse du spéléo (au $\cos \theta$ près). Elle peut s'exprimer en W par m/s de vitesse. Elle vaut alors 11 W/(m/s). Cette puissance dissipée engendre une force de freinage parallèlement à la corde qu'on notera F_T et qui vaut ici 11 N.



$$F_T = \frac{1}{2} f M g \cos \theta \frac{d}{R}$$

Cette force est faible, mais doit être intégrée dans le mouvement du spéléo.

4-2-3- Retour sur le mouvement du spéléo sur la tyrolienne

On modifie légèrement le problème dynamique en rajoutant les deux forces F_D et F_T que nous venons d'estimer. Ces deux forces sont parallèles à la corde et indépendantes de la vitesse.

Équation de la dynamique pour le spéléo. L'équation de la dynamique appliquée au personnage s'écrit :

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = -M g \vec{k} - \frac{1}{2} \rho C_x S V \vec{V} - (F_D + F_T) \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} + \vec{F}$$

Dans cette relation \vec{V} est le vecteur vitesse du spéléo, M sa masse, ρ est la masse volumique de l'air, les deux forces F_D et F_T proviennent de la dissipation d'énergie (respectivement dans la poulie et dans la corde elle-même). La force \vec{F} est la force exercée par la corde sur la poulie.

Le poids du spéléo se décompose en deux parties : l'une tangente à la corde sert à accélérer le spéléo, l'autre perpendiculaire à la corde est la seule qui interagit avec la corde donc qui intervient dans la forme de la corde.

Point chargé par le spéléo. Quand le spéléo passe au milieu d'un tronçon (tronçon k), la force qu'exerce le personnage sur la corde se décompose en deux composantes, l'une sur x et l'autre sur z . Dans le cas dynamique, la composante parallèle à la corde est nulle. Ne reste que la composante normale à la corde qui vaut $Mg \cos \theta$. Cette force se décompose ensuite en deux parties, l'une sur x et l'autre sur z . Ces deux composantes valent donc :

$$F_x = M g \cos \theta \sin \theta$$

$$F_z = M g \cos^2 \theta$$

Les deux forces de frottement calculées plus haut agissent sur le spéléo qui est freiné dans son mouvement (via la poulie de liaison), et ces deux forces agissent aussi sur la corde qui subit une poussée parallèlement à la tangente. Quand on prend comme système l'ensemble corde + spéléo, ces forces de frottement doivent disparaître.

Les deux relations s'écrivent alors (on a choisi de nouveau la valeur de θ à gauche du segment pour éviter de compliquer l'expression, au prix d'une légère imprécision il est vrai) :

$$[T_{i-1} - F_D - F_T + M g \sin \theta_{i-1}] \cos \theta_{i-1} = T_i \cos \theta_i$$

$$T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + g m b + M g \cos^2 \theta_{i-1} - (F_D + F_T) \sin \theta_{i-1} = T_i \sin \theta_i$$

On élimine d'abord l'angle θ :

$$T_i = \sqrt{\cos^2 \theta_{i-1} (T_{i-1} - F_D - F_T + M g \sin \theta_{i-1})^2 + [(T_{i-1} - F_D - F_T) \sin \theta_{i-1} + g m b + M g \cos^2 \theta_{i-1}]^2}$$

Et on en déduit l'angle θ_i :

$$\theta_i = \text{Arctg} \left(\frac{(T_{i-1} - F_D - F_T) \sin \theta_{i-1} + g m b + M g \cos^2 \theta_{i-1}}{\cos \theta_{i-1} (T_{i-1} - F_D - F_T + M g \sin \theta_{i-1})} \right)$$

On pourrait refaire le calcul numérique pour différentes positions du spéléo passant aux 20 points retenus, mais les actions étant tangentielles, la forme de la corde ne va pas beaucoup changer. Nous négligeons de

faire ce calcul et passons directement à la trajectoire du spéléo en partant de l'ancienne trajectoire du spéléo.

Trajectoire du spéléo

On va approximer la trajectoire du spéléo à partir du graphique obtenu dans le chapitre 4. Une bonne approximation avait été trouvée plus haut :

$$z = 300 \left[\left(\frac{x}{980} - 1 \right)^2 - 1 \right]$$

D'où la tangente à la courbe en fonction de x :

$$\text{tg } \theta = \frac{dz}{dx} = 0,612 \left(\frac{x}{980} - 1 \right)$$

À partir de cette relation, on peut trouver l'expression du mouvement au cours du temps en projetant l'équation de la dynamique sur la tangente à la corde (la force F n'a pas de composante dans cette direction).

$$M \frac{dV}{dt} = -M g \sin \theta - \frac{1}{2} \rho C_x S V |V| - (F_D + F_T) \frac{V}{|V|}$$

On part du repos et on calcule numériquement à chaque instant le mouvement et la position du spéléo. Si on connaît la vitesse à l'instant t, on en déduit la vitesse à l'instant t + Δt :

$$V' = V - \Delta t \left[g \sin \theta + \frac{1}{M} \left(\frac{\rho C_x S}{2} |V| + \frac{F_D + F_T}{|V|} \right) V \right]$$

De même pour la position :

$$x' = x + u \Delta t = x + V \cos \theta \Delta t$$

Exemple numérique approché :

Pour les valeurs retenues dans l'introduction et au-dessus, cela conduit à la relation numérique :

$$u' = u - \Delta t \left[10 \frac{dz/dx}{\sqrt{1 + (dz/dx)^2}} + \left(0,413 |u| + \frac{13,4}{|u|} \right) \frac{u}{80} \right]$$

Nous avons représenté sur la figure suivante la distance atteinte par le spéléo au cours du temps quand on tient compte de la dissipation et à droite (pour mémoire) les résultats obtenus plus haut quand on n'en tient pas compte.

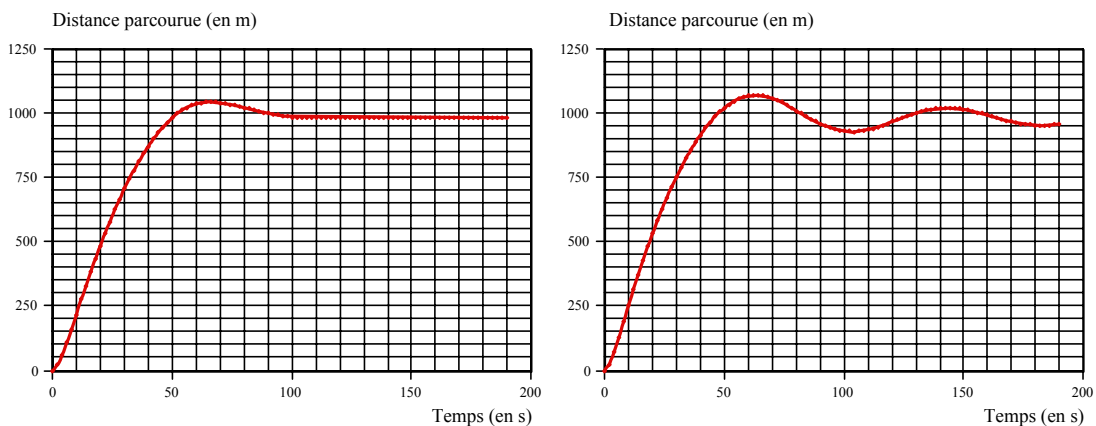


Fig. 19- Distance parcourue par le spéléo en fonction du temps à gauche avec dissipation, à droite (pour mémoire) sans dissipation

De même, nous avons représenté ci-dessous la vitesse du spéléo au cours du temps avec prise en compte ou

non de la dissipation d'énergie par les frottements et la déformation de la corde. Les oscillations, en particulier, sont supprimées par le frottement.

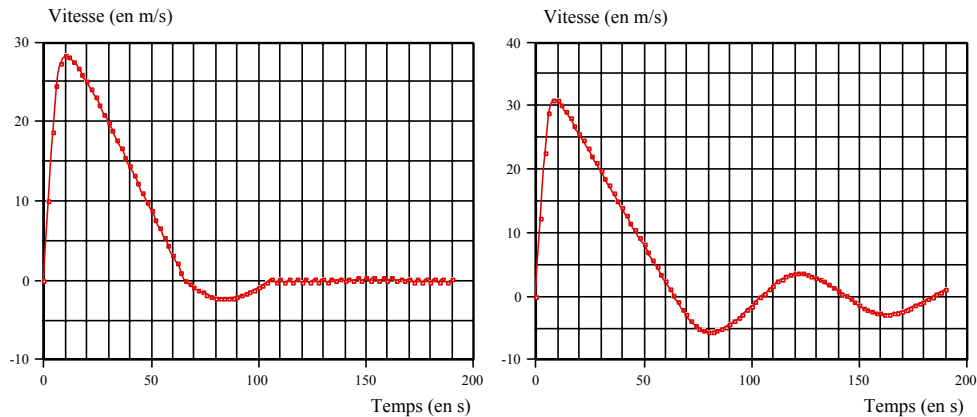


Fig. 20- Vitesse du spéléo en fonction du temps ;
à gauche avec dissipation, à droite (pour mémoire) sans dissipation

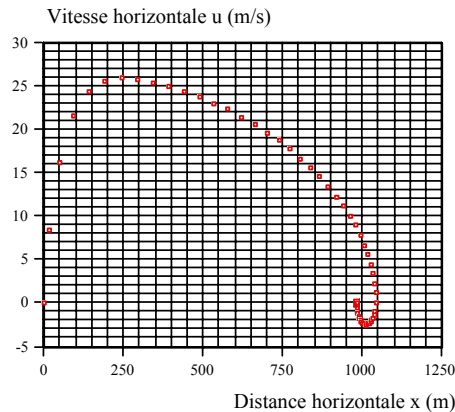


Fig. 21- Vitesse horizontale du spéléo en fonction de la distance horizontale

On voit que le frottement de force constante exerce son action principalement à la fin du mouvement quand les forces sont devenues faibles.

4-3- Aspect cordes vibrantes

La propagation d'ondes dans la corde génère des oscillations qui pourraient atteindre une certaine amplitude. La théorie des cordes vibrantes nous donne comme vitesse de propagation des ondes transversales :

$$V_T = \sqrt{\frac{T}{m}} = \sqrt{\frac{3000}{0,08}} = 190 \text{ m/s}$$

La fréquence du fondamental de résonance se calcule par :

$$\text{fréquence} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2 \cdot 1300} \sqrt{\frac{3000}{0,08}} = 0,074 \text{ Hz} \text{ soit une période} = 13 \text{ s}$$

Cette fréquence pourrait être excitée par le vent qui ferait osciller la corde avec cette période. Par vent violent, et soufflant en rafale, cela pourrait aggraver l'amplitude et donc les tensions sur les amarrages. Il faudrait alors prévoir un amortisseur sur la corde. On connaît l'exemple célèbre du pont américain de Tacoma qui est entré en résonance (pour les oscillations de torsion) avec le vent, et a été détruit. Mais vue la longueur de la corde il est peu probable que cela arrive.



La théorie des ressorts nous donne comme fréquence longitudinale :

$$V_x = \sqrt{\frac{T_n}{e m}} = \sqrt{\frac{800}{0,02 \cdot 0,08}} = 707 \text{ m/s}$$

La résonance pourra se produire pour la fréquence suivante du fondamental :

$$\text{fréquence} = \frac{V_x}{2 L} = \frac{707}{2 \cdot 1300} = 0,27 \text{ Hz, soit une période de } 3,7 \text{ s}$$

Cette oscillation longitudinale sera facile à observer.

4-4- Prise en compte de l'inertie de la corde

La corde fait une centaine de kilogramme. Elle se déplace rapidement au fur et à mesure que le spéléo descend. Ces accélérations rapides engendrent des forces que nous allons essayer de prendre en compte. Ce sont ces forces d'inertie qui sont susceptibles d'engendrer des oscillations.

Principe de l'étude. Chaque tronçon de corde de longueur b subit un déplacement entre deux positions calculées du spéléo. Nous partirons de la loi horaire du spéléo calculée en 4-1 pour trouver le mouvement de la corde. Deux positions successives du spéléo permettent d'estimer la vitesse de chaque tronçon de corde. Trois positions successives du spéléo permettent d'estimer l'accélération de chaque tronçon de la corde. Nous partons de là pour recalculer les forces qui s'exercent sur la corde en intégrant la force d'inertie de la corde elle-même. On voit bien que cette méthode est une méthode itérative qu'il faudrait appliquer plusieurs fois consécutives pour obtenir une certaine précision.

Nous appelons A le vecteur accélération du tronçon de corde et décomposons ce vecteur en deux composantes sur Ox et Oz que nous appelons A_x et A_z .

Relations d'itération. Supposons connues les coordonnées de l'extrémité gauche du tronçon i , calculons celles de l'extrémité droite. La tension T_{i-1} est connue. On écrit les deux équations statiques du segment i .

$$T_{i-1} \cos \theta_{i-1} + m b A_x = T_i \cos \theta_i$$

$$T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + m b (g + A_z) = T_i \sin \theta_i$$

Ces deux équations à deux inconnues nous fournissent θ_i et T_i en fonction des valeurs précédentes. On calcule $\cos \theta$ par la première relation et $\sin \theta$ par la deuxième et l'on calcule la somme des carrés (qui vaut 1) :

$$(T_{i-1} \cos \theta_{i-1} + m b A_x)^2 + [T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + m b (g + A_z)]^2 = T_i^2$$

Cette équation nous donne T_i .

$$T_i = \sqrt{(T_{i-1} \cos \theta_{i-1} + m b A_x)^2 + [T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + m b (g + A_z)]^2}$$

Ayant calculé T_i , on déduit θ du rapport, membre à membre, de l'équation 2 par l'équation 1.

$$\theta_i = \text{Arctg} \left(\frac{T_{i-1} \sin \theta_{i-1} + m b (g + A_z)}{T_{i-1} \cos \theta_{i-1} + m b A_x} \right)$$

Coordonnées de l'extrémité droite du tronçon. On calcule ensuite les coordonnées de l'extrémité droite du segment par les relations :

$$x_i = x_{i-1} + b \left(1 + e \frac{T_{i-1} + T_i}{2 T_n} \right) \cos \left(\frac{\theta_{i-1} + \theta_i}{2} \right)$$

$$z_i = z_{i-1} + b \left(1 + e \frac{T_{i-1} + T_i}{2 T_n} \right) \sin \left(\frac{\theta_{i-1} + \theta_i}{2} \right)$$

Pour la détermination des accélérations de la corde, nous pouvons prendre les données à partir de la résolution dynamique fournie par 4-1.

Amélioration du modèle. On est parti du cas dynamique (sans prise en compte de l'inertie de la corde) pour modifier la forme de la corde. On comprend bien qu'il faudrait continuer, et recalculer le mouvement du spéléo pour obtenir une meilleure précision sur le mouvement de la corde. Cette itération est assez lourde. Peut-on espérer trouver une méthode plus complète ? C'est ce que nous allons examiner dans le paragraphe suivant.

4-4- Position du spéléo au cours de la descente

L'expérience a montré que le spéléo accroché par sa longe fixée devant lui à la ceinture a tendance à se retrouver dos au vent et à regarder vers le point de départ. Peut-on expliquer simplement ce phénomène ?

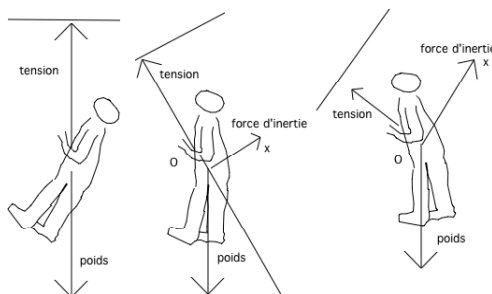


Fig. 22- L'accélération initiale du spéléo en fonction de la pente de la tyrolienne

On se place tout d'abord au démarrage du spéléo. Rapidement après une petite oscillation, la longe et les deux forces (poids et force d'inertie) se retrouvent alignées. Le poids est une force verticale, la tension de la longe est une force perpendiculaire à la tyrolienne. La somme des deux forces d'inertie et de tension de la longe est donc constante. Plus la pente est forte et plus la force d'inertie d'entraînement est grande.

Le repère entraîné avec le spéléo n'est pas galiléen, mais en ajoutant les forces d'inertie, il est équivalent au repère fixe (tant qu'il n'y a pas de forces dues au vent). Comme on devine que sur une tyrolienne horizontale, le spéléo peut prendre la direction qu'il veut, on en déduit qu'au moment du démarrage, le spéléo peut avoir une direction quelconque.

Mais la vitesse augmentant, la force du vent croît très vite et possède une direction opposée à la vitesse du spéléo. Cette force a même direction que la force d'inertie et remplace cette dernière qui diminue puisque leur somme reste constante. Sauf que le point d'application de la force du vent n'est pas le centre de gravité du spéléo, mais un point un peu devant le spéléo. Cette situation est instable puisqu'un couple de pivotement apparaît alors au fur et à mesure que la force du vent augmente.

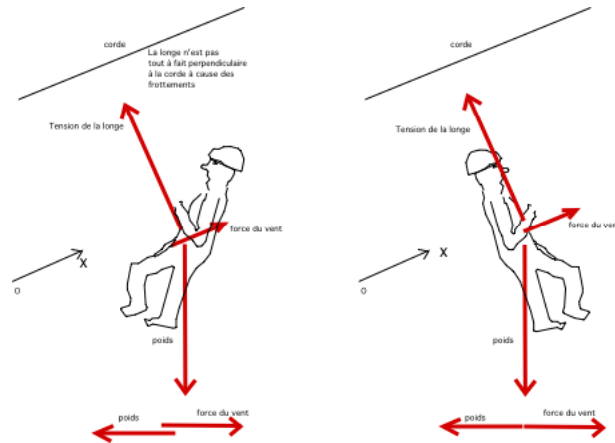


Fig. 23- Les deux positions possibles pour le spéléo

Sur la figure ci-dessus, nous avons représenté les forces appliquées au spéléo dans les deux configurations. À gauche, la configuration est moins stable et un couple de pivotement existe qui tend à retourner le spéléo. À droite, la position ramassée du spéléo tend à ramener le centre de poussée du vent et le centre de gravité vers le mousqueton d'accroche de la longe. On obtient une configuration plus stable.

Si le spéléo se cambrait dans la position face au vent, le centre de poussée reculerait, mais le centre de gravité aussi. Le deuxième effet ferait que le spéléo se retrouverait dans une position plus couchée. Pour ce qui est du couple de pivotement, il est difficile de savoir quel est l'effet des reculs qui l'emporteraient sur l'autre, mais on peut penser que le centre de poussée reculerait plus que le centre de gravité. Dans l'affirmative, cela permettrait de rester de face. Il faudrait tester sur la tyrolienne un spéléo se cambrant fortement : se remettrait-il de face tout seul ?

On pourrait imaginer accrocher la longe du spéléo dans son dos. Est-ce que sa descente se ferait de face ? Le spéléo sera en position plus penchée sur l'horizontale. Il semble qu'il restera de dos, et en s'allongeant bien droit il pourra minimiser la force du vent bien mieux qu'avec l'amarrage devant.

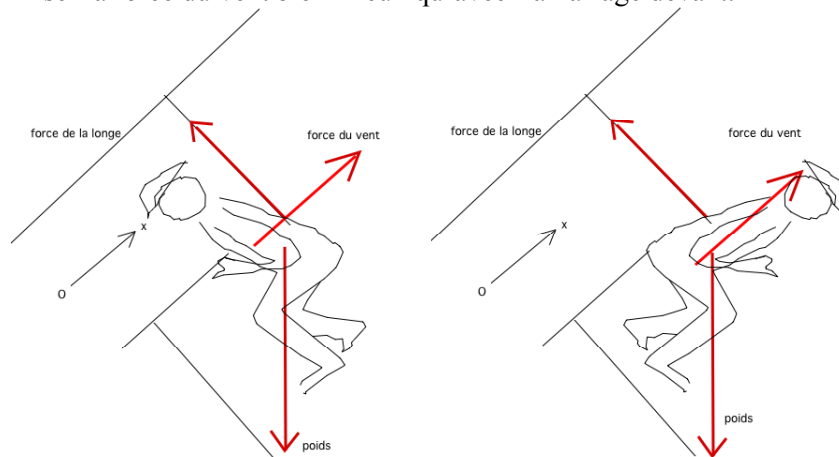


Fig. 24- Accrochage de la longe à l'arrière de la ceinture

6- Existe-t-il une limite de portée à une tyrolienne sur corde simple ?

La réponse est oui. Examinons en détail les conditions. Le poids de la corde augmente à peu près comme la portée. Si la corde est non chargée par un spéléo, la résistance à la traction d'une corde augmente comme le carré de son diamètre. Le poids linéique d'une corde augmente aussi comme le carré de son diamètre. Il ne sert donc à rien d'augmenter le diamètre.

Une corde d'un kilomètre pesant à peu près 1000 N et le spéléo 800 N, on voit que pour de très grandes tyroliennes de plusieurs kilomètres, la part du spéléo va décroissante avec la longueur. Et à la limite, le spéléo ne joue plus guère de rôle. Le problème tend vers un problème purement statique.

La condition de réalisation de la tyrolienne porte sur la condition suivante : on demande que le personnage descendant la tyrolienne arrive sans action supplémentaire au voisinage du point bas, ce qui nécessite une certaine tension à l'amarrage supérieur. On veut que la tension soit plus basse qu'une certaine tension limite imposée, par exemple 4000 ou 5000 N. Les résultats que nous présentons ci-après ont été obtenus à l'aide du programme en Visual-Basic et non à l'aide des feuilles de calcul Excel.

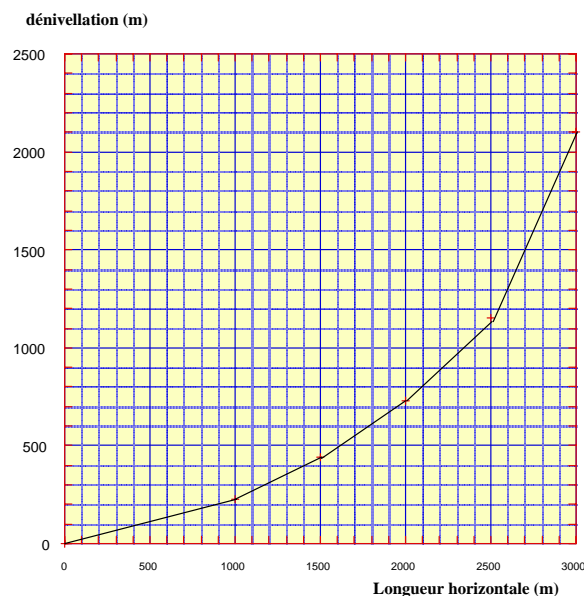


Fig. 34- La dénivellation nécessaire en fonction de la distance
Élasticité de 1 %, $CxS = 0,75 \text{ m}^2$ et Masse du spéléo de 80 kg

On a tracé la dénivellation nécessaire (pour une tension sans charge de 4000 N et pour un CxS de $0,75 \text{ m}^2$) pour que le spéléo parvienne à l'amarrage inférieur. On voit qu'elle augmente à peu près comme le carré de la portée de la tyrolienne.

La vitesse du spéléo est limitée par le freinage de l'air. Nous avons représenté la vitesse maximale atteinte au cours de la descente en fonction de la portée de la tyrolienne (140 km/h pour un CxS de $0,75 \text{ m}^2$ et une masse de 80 kg).

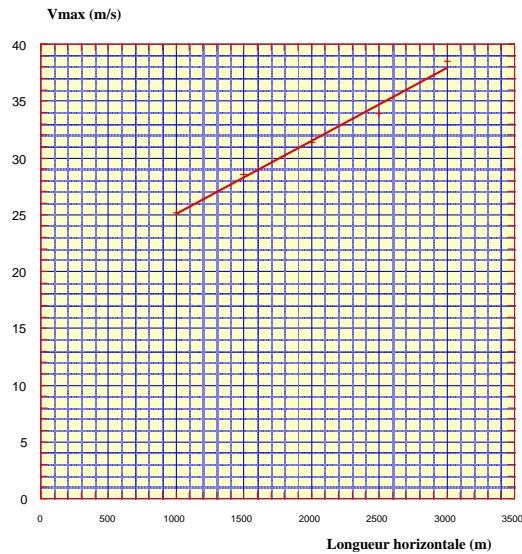


Fig. 35- Vitesse maximale (m/s) atteinte en fonction de la portée de la tyrolienne

Cette vitesse limite (mettons 140 km/h) fait que la durée de la descente augmente à peu près linéairement avec la portée.

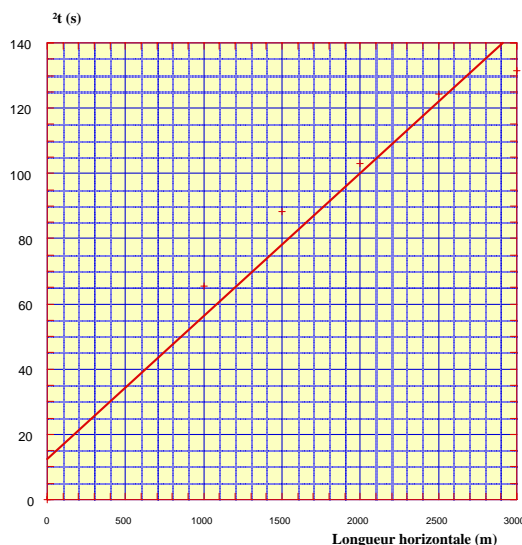


Fig. 36- Le temps de descente du spéléo en fonction de la portée

Par exemple, pour une tyrolienne de 3000 m de distance horizontale et de 1300 m de dénivellation, le personnage ne s'approchera de l'amarrage inférieur qu'à la condition de s'allonger pour diminuer le Cx. par exemple avec un CxS de 0,375, il atteindra la vitesse maximale de 173 km/h au bout de 19 s et arrivera en bout de course à la distance de 2750 m au bout de 103 s.

Pour une tyrolienne encore plus longue, il faudra une dénivellation encore plus grande (elle croît comme le carré de la portée). L'angle à l'amarrage haut augmente avec la portée. Il vaut 48° pour 3000 m.

Il est facile de voir que la limite de portée d'une tyrolienne est de l'ordre de 3,5 km avec une dénivellation de l'ordre de 2 km, ce qui n'est pas facile à trouver. Pour une telle tyrolienne, le spéléo atteindrait la vitesse de



187 km/h au bout de 19 s en se couchant dans le sens du mouvement et il serait à la distance de 3100 m au bout de 102 s (à vitesse nulle). L'angle à l'amarrage haut serait de 57°.

Ainsi, la limite d'une tyrolienne sur corde simple provient de la condition que le personnage doit arriver au voisinage du point bas, et cette condition entraîne que la dénivellation augmente plus vite que la portée, d'où la limite observée.

Conclusions

Les données retenues pour la tyrolienne sont tout à fait compatibles avec le cahier des charges adopté pour la sécurité. Il restera à vérifier qu'à aucun moment de sa trajectoire, le spéléo ne risque heurter le sol ou un obstacle quelconque (en tenant compte de la flèche due au poids du spéléo et de la flèche due au vent éventuel).

Le spéléo devra être remonté le long de la corde sur une belle longueur (40 à 130 m) pour atteindre l'appui de droite. Mais c'est le prix à payer pour avoir une bonne sécurité (par rapport au risque de venir heurter l'amarrage du bas). On pourrait quand même envisager d'augmenter un peu la tension initiale de la corde au fur et à mesure des essais.

Le test préliminaire devra être fait pour chaque tyrolienne avec un mannequin représentatif du coefficient de frottement Cx d'un homme. Dans le cas de la tyrolienne du Pas des Rages, l'expérience a été faite avec deux sacs spéléo remplis de pierres et pesant au total 80 kg.

Bibliographie

Nous n'avons pas fait de recherche bibliographique sur ces questions, mais Jean-Pierre Cassou fournit quelques références dans ses rapports.
